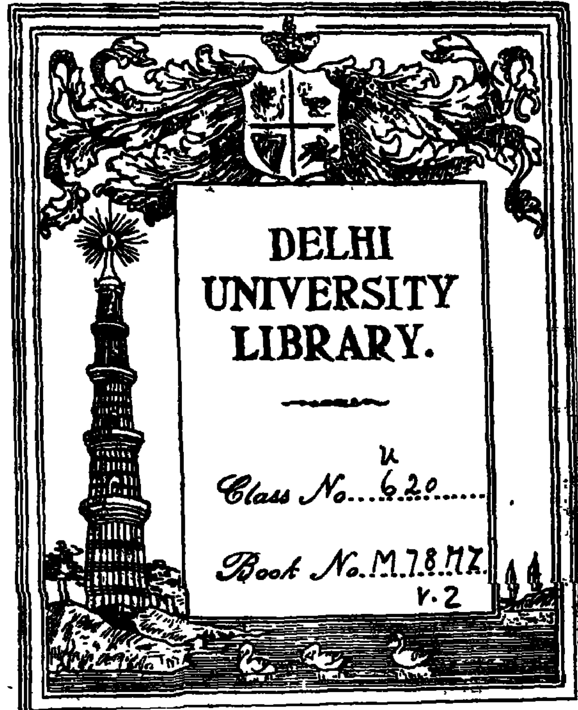
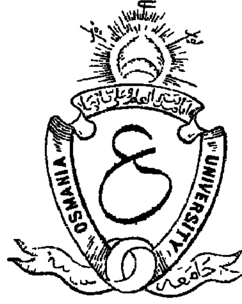

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.
Class No. U 620
Book No. M78MZ
V.2



سلسلۂ مطبوعات دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ

مضبوطی اشیا

(حصۂ دوم)

مصنفۂ

آرتھر مارلے - ڈی - ایس سی وغیرہ

مترجمہ

مولوی ضیاء الدین صاحب انصاری ایم - اے (عثمانیہ) بی ایس سی آنرز (مینچسٹر)

پروفیسر سول انجینیری کلیہ انجینیری جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۶۰ھ م سنہ ۱۳۵۰ف م سنہ ۱۹۴۱ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز لانگمنس گرین اینڈ کمپنی کی
اجازت سے اُردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شائع کی گئی ہے۔





مضبوطیٔ اشیا

حصۂ دوّم

باب ۱۰ تا باب ۱۷

فہرستِ مضامین

مضبوطی اشیاء

حصّہ دوم

دسواں باب

صفحہ

گیارہواں باب

صفحہ

نل، اُستوانے اور قرص

بارہواں باب

منحنی سلاخوں کا خماؤ

صفحہ

تیرہواں باب

چپٹی تختیاں

چودھواں باب

ارتعاش اور فاصل رفتاریں

صفحہ

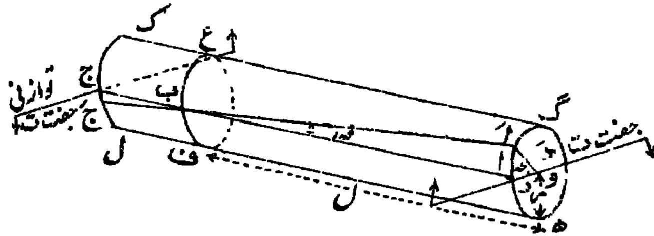
صفحہ ۳۰۵

دسواں باب

مروڑ

۱۰۸ - خالص مروڑ میں زور اور فساد — مدور تراش —

اگر ایک اُستوانی سلاخ کو ایک ایسے جفت سے مروڑا جائے جس کا محور سلاخ کے محور پر منطبق ہو تو سلاخ خالص مروڑ کے تحت ہوگی - کسی تراش کے کسی نقطے پر زور خالص جز کا ہوگا اور وہ دو مستوی جن پر زور بالکل مماسی



شکل ۱۵۲

ہوگا (دیکھو دفعہ ۸) حسبِ ذیل ہونگے (۱) وہ مستوی جو زیرِ غور نقطے میں سے گزرتا ہے اور محور کے علی القوائم ہے (۲) وہ مستوی جو اس نقطے میں سے اور محور میں سے گزرتا ہے - ان میں سے پہلے مستوی پر زور کی سمت ہر جگہ محور سے نکلے ہوئے نیم قطری خطوط کے علی القوائم ہوگی - خاص مستوی

مماسی یا جزی زور کے مستویوں سے ۴۵° کا زاویہ بنائینگے (دیکھو دفعات ۸ اور ۱۵) اور دونوں خاص زوروں کی حدتیں جو مخالف علامت کی ہونگی مقدار میں جزی زور کی حدت کے مساوی ہونگی -

فساد اس طرح کا ہوگا کہ سلاخ کے محور کے علی القوائم کوئی تراش محور کے گرد دوسری مشابہ تراشوں کی اضافت سے خفیف سی گردش کریگی - لچک کی حدود کے اندر فساد کی نوعیت شکل ۱۵۲ میں دکھائی گئی ہے - یہ ایک ٹھوس اُستوانی سلاخ کو تعبیر کرتی ہے جو اس کے سروں پر عمل کرتے ہوئے دو مساوی اور مخالف جفتوں کے تحت تعادل میں ہے - منحنی سطح پر کا ایک خط ا ب ج جو ابتدا میں مستقیم اور محور کے متوازی تھا فساد کے بعد ایک مرغولہ اَ ب جَ کا ایک حصہ بن جائیگا جو محور کے متوازی خطوط مثلاً ا ب ج سے ہر جگہ زاویہ فہ بناتا ہے - اس زاویے کا مستقل ہونا صاف ظاہر ہو جائیگا اگر منحنی سطح کو کھول کر مستوی سطح کی شکل میں بچھایا جائے - اس صورت میں اَ ب جَ ایک خطِ مستقیم ہوگا - منحنی سطح کے تمام مادے کے لیے یہ زاویہ فہ جزی فساد ہے (دفعہ ۱۰)' اور چونکہ لچکدار فساد خفیف ہے اس لیے صفحہ ۳۰۶

$$فہ = \frac{اَا}{اب} = \frac{ژ}{س} \text{ (نیم قطری)} \quad ....(۱)$$

جہاں ژ سطح پر جزی زور کی حدت ہے اور س اُستواری کا مقیاس ہے (دیکھو دفعہ ۱۰)

کسی نقطہ د کے لیے جو تراش کے مرکز سے فاصلہ ر پر ہو جزی فساد فہ اور جزی زور کی حدت ج اسی طرح کی مساوات سے مربوط ہونگے :-

$$فہ = \frac{دَد}{اب} = \frac{ج}{س} \text{ (نیم قطری)} \quad ....(۲)$$

وہ نیم قطری خط جو ابتدا میں و ا پر تھا فساد کے بعد محل و اَ

اختیار کریگا اور طول اب یا ل میں مروڑ کا زاویہ ا و اَ = طہ ہوگا۔ اگر سلاخ کا نصف قطر سا ہو تو (۱) سے

طہ = اا َ / ا و = ل فہ / سا (نیم قطری) ....(۳)

اور اسی طرح (۲) سے

طہ = د دَ / و د = ل فہ / ر (نیم قطری) ....(۴)

(۱) اور (۳) سے

ز‌ج = فہ س = سا طہ / ل . س ....(۵)

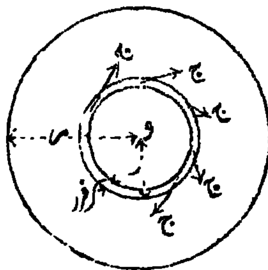
اور (۲) اور (۴) سے

ج = فہ س = ر طہ / ل س ....(۶)

یعنی تراش میں جزی زور کی حدت ہر نقطے پر محور سے فاصلے کے متناسب ہوگی اور محور پر صفر ہوگی اور بڑھتے ہوئے محیط پر انتہائی قیمت ز‌ج اختیار کریگی۔

۱۰۹۔ مروڑ کی سعی، فساد اور زور کے درمیان ربط۔

ایک دیے ہوئے ابعاد کی استوانی سلاخ پر لچک کی حدود کے اندر ایک دیے ہوئے مروڑ کے فسادی عمل اور اس کے اثرات کے درمیان ربط تعادل کے اصولوں اور دفعہ گزشتہ کے ضابطوں سے محسوب ہوسکتا ہے۔ مدور سلاخ کے ٹکڑے ع گ ھ ف کے تعادل پر غور کرو



شکل ۱۵۳

(شکل ۱۵۲)۔ اس پر خارجی قوتیں صرف سرے اگ ھ پر کا جفت ت ہے اور وہ قوتیں ہیں جو ٹکڑا ک ع ف ل مستوی ع ب ف کے جزی زور کے ذریعے لگاتا ہے۔ اس لیے موخرالذکر قوتیں تحویل ہوکر ایک جفت بنی چاہییں جس کی مقدار ت ہو اور جو سرے اگ ھ کے جفت کی مخالف سمت میں ہونا چاہیے۔ اگر شکل ۱۵۳ تراش کو تعبیر کرے تو نصف قطر ر کے اور عرض مف ر کے ایک پتلے حلقے پر مجموعی جزی قوت

$$= ج \times ۲\pi ر مف ر$$

صفحہ ۳۰۷ اور (۵) اور (۶)، دفعہ ۱۰۸ سے

$$ج = زج \times \frac{ر}{س}$$

اس لیے $$ج \times ۲\pi ر مف ر = زج \times \frac{۲\pi}{س} ر^۲ مف ر$$

اور محور کے گرد اس کا معیار

$$مف ت = ۲\pi \frac{زج}{س} ر^۳ مف ر$$

ساری تراش کو پتلے ہم مرکز حلقوں میں تقسیم کرکے معیاروں کا مجموعہ لینے سے تراش پر عمل کرنے والا مجموعی جفت

$$ت = ۲\pi \frac{زج}{س} \int_۰^س ر^۳ فر = \frac{\pi}{۲} زج س^۳ \text{ یا } \frac{\pi}{۱۶} زج ق^۳ \quad ....(۱)$$

جہاں ق یا ۲ س سلاخ کا قطر ہے۔ مقدار

$$۲\pi \int_۰^س ر^۳ فر = \frac{\pi س^۴}{۲} \text{ یا } \frac{\pi ق^۴}{۳۲} = جا$$

تراشش کے رقبے کا محور کے گرد قطبی معیارِ جمود ہے اور (۱) کو لکھا جا سکتا ہے:—

$$ت = \frac{ز_ج \text{ جا}}{ر} = \frac{ج \text{ جا}}{ر}$$

یا $ز_ج = \frac{ت\ ر}{جا}$ اور $ج = \frac{ت\ ر}{جا}$ ....(۲)

یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ابعاد اور زج کے لیے طول کی جو اکائی استعمال کی جائے وہی ت کے لیے استعمال ہو مثلاً اگر زج اور ابعاد انچوں میں ہو تو ت کو پونڈ انچوں یا ٹن انچوں میں رکھنا چاہیے۔

اس شکل (۲) سے مروڑ کے جفت، زور، اور ابعاد کے ربطوں اور خماؤ کے معیار، زور اور ابعاد کے ربطوں (دفعہ ۶۳) کی مماثلت ظاہر ہوتی ہے اور مقدار $\frac{جا}{ر}$ کو ایک ٹھوس مدور تراش کا قطبی مقیاس کہا جاسکتا ہے۔

مساوات (۵) دفعہ ۱۰۸ سے:—

$$ط = \frac{ز_ج \times ل}{ر \times س} = \frac{ت \times ل}{س \times جا} \text{ یا } \frac{۳۲}{\pi} \frac{ت\ ل}{ق^۴ س} \text{ (نیم قطری) } ....(۳)$$

یا $\frac{ت}{س\ جا}$ نیم قطری فی اکائی طول۔ نیز درجوں میں

$$ط = \frac{۵۸۳\ ت\ ل}{س\ ق^۴} \text{ درجے } ....(۴)$$

مروڑ کی مقدار طول کے متناسب ہوگی اور محور کے گرد تراش کے (قطبی) معیارِ جمود (جا) کے اور اس طرح ٹھوس مدور تراش کے ڈھرے میں قطر کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہوگی۔ حاصل ضرب س جا کو جس کے مروڑ کی مقدار بالعکس متناسب ہے ڈھرے کی مروڑ کی استواری کہا جاسکتا ہے۔ مدور تراش کے سوا دیگر تراشوں کے لیے جا سے کسی قدر

صفحہ ۳۰۸

چھوٹی مقداریں استعمال کرنی چاہییں (دیکھو دفعہ ۱۱۲)۔ ٹھوس مدور تراشوں کے لیے زور کی حدت (۱) کی رُو سے قطر کے مکعب کے بالعکس متناسب ہوگی۔

۱۱۰۔ طاقت کے انتقال کے لیے دُھروں کے قطر۔

دُھرے کے ذریعے طاقت کی منتقلی میں اوسط مروڑ کے معیار یا پیچیدگی (torque) کو (نیم قطریوں میں) طے کیے ہوئے زاویے سے ضرب دینے سے منتقل شدہ کام حاصل ہوگا۔ اس لیے اگر اوسط مروڑ کا معیار پونڈ انچوں میں ت ہو جو ایسی طاقت (ا۔ط) کو ن چکر فی منٹ کی رفتار پر منتقل کرنے سے پیدا ہو تو

$$ت = \frac{۱۲ \times ۳۳۰۰۰ \times ا۔ط}{۲\pi ن} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اعظم مروڑ کا معیار عموماً اس سے خاصا زیادہ ہوگا کیونکہ مروڑ کا معیار ہر قسم کی چلائی میں بہت کچھ متغیر ہوتا ہے۔ اگر اعظم اور اوسط پیچیدگی کی نسبت کو تعبیر کرنے کے لیے ایک عددی سر اختیار کیا جائے تو اعظم مروڑ کا معیار

$$ت = \frac{ا۔ط}{ن} \times مستقل \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور ایک خالص مروڑ کو منتقل کرنے والے دُھرے میں (یعنی جس میں خماؤ کا زور نہ ہو) اگر بے خطر اعظم جزی زور کی حدت نج ہو تو مساوات (۱) دفعہ ۱۰۹ سے

$$ق = \sqrt[3]{\frac{۱۶ ت}{\pi نج}} = \sqrt[3]{\frac{ا۔ط}{ن}} \times مستقل \ldots\ldots\ldots (۳)$$

فولادی دُھروں کے لیے اس مستقل کی ایک عام قیمت تقریباً ۳ء۳ ہے۔ جب اعظم مروڑ کے معیار کا تخمینہ ہو جائے تو نج کی عام کام کی قیمتیں ۸۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہیں۔ نج یا مساوات (۳) کے مستقل کی

موزوں قیمتیں مشینوں کی تجویز کی کتابوں میں ملینگی - لمبے دُھروں میں اس شرط کی وجہ سے کہ ایک دیے ہوئے طول میں مروڑ ایک مختص حد کے اندر رہے یہ ممکن ہے کہ اس قطر سے بڑا قطر درکار ہو جو جزی زور کی اعظم حدت پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہو - اس مروڑ کی صلابت (یعنی زور کی بجائے فساد پر حد عائد کرنے) کی ضرورت دفعہ ۱۶۷ سے سمجھ میں آئیگی -

۱۱۱ - کھوکھلے مدور دُھرے ——— چونکہ مدور دُھرے میں کسی تراش کے تمام نقاط پر زور کی حدت محور سے فاصلے کے تناسب ہوتی ہے اس لیے جب ٹھوس دُھرے میں سطح کے قریب کا مادہ زور کی اعظم بے خطر حد کو پہنچیگا تو محور کے قریب کا مادہ بہت خفیف زور برداشت کررہا ہوگا - کھوکھلے دُھرے کی صورت میں زور کی حدت حسبِ سابق ہر جگہ محور سے فاصلے کے متناسب ہوگی لیکن اعظم سے لے کر ایک چھوٹی قیمت تک بدلیگی لیکن صفر نہیں ہوگی - اگر دونوں صورتوں میں اعظم زور ایک ہی ہو تو کھوکھلے دُھرے میں زور کی اوسط حدت زیادہ ہوگی اور اس طرح ایک دیا ہوا تراشی رقبہ بڑی پیچیدگی کی مزاحمت کرسکیگا -

فرض کرو کہ ایک کھوکھلے دُھرے کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر $س_۱$ یا $\frac{ق_۱}{۲}$ اور $س_۲$ یا $\frac{ق_۲}{۲}$ ہیں - تب مساوات (۱) دفعہ ۱۰۹ کو حدود کے درمیان تکمل کرنے سے صفحہ ۳۰۹

$$ت = ۲\pi \frac{ز_ج}{س_۱} \int_{س_۲}^{س_۱} س^۳ \, فر = \frac{\pi}{۲} ز_ج \frac{س_۱^۴ - س_۲^۴}{س_۱}$$

$$= \frac{\pi}{۱۶} ز_ج \frac{ق_۱^۴ - ق_۲^۴}{ق_۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جا کی قیمت (۲) اور (۳) دفعہ ۱۰۹ میں کھوکھلے دُھرے کے لیے

$$جا = \pi \frac{(\text{س}_1^4 - \text{س}_2^4)}{2}$$

ہے۔ مروڑ کا زاویہ

$$ط = \frac{32\ \text{ت ل}}{\pi(\text{ق}_1^4 - \text{ق}_2^4)\ \text{س}}\ \text{نیم قطری}$$

$$= \frac{583\ \text{ت ل}}{\text{س}(\text{ق}_1^4 - \text{ق}_2^4)}\ \text{درجے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مضبوطی (یعنی ایک دی ہوئی انتہائی حدت کے زور کے لیے مروڑ کی مزاحمت) فی اکائی تراشی رقبہ یا فی اکائی وزن کے لیے کھوکھلے اور ٹھوس دھرے کا ایک ہی بیرونی قطر کے لیے مقابلہ کرنے سے :—

$$\frac{\text{کھوکھلا}}{\text{ٹھوس}} = \frac{\text{س}_1^4 - \text{س}_2^4}{\text{س}_1(\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2)} \div \frac{\text{س}_1^3}{\text{س}_1^2} = 1 + \left(\frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}\right)^2$$

جو س۲ کے س۱ کے قریب آنے کی صورت میں یعنی ایک پتلی نلی کی صورت میں انتہائی نسبت ۲ کو پہنچتا ہے۔ دونوں دُھروں کی مروڑ کی استواریوں میں بھی وہی نسبت ہوگی جو ان کی مضبوطیوں میں ہے۔

۱۱۲۔ غیر مدور تراش کے دُھروں کی مروڑ۔ ایسے دُھروں کی مروڑ جو متشاکل ہیں لیکن مدور نہیں بہت پیچیدہ ہے۔ تراشیں جو ابتداءً مستوی ہوں مُڑ جاتی ہیں اور جزی زور کی اعظم حدت عموماً تراش کے محیط کے اُس نقطے پر واقع ہوتی ہے جو مروڑ کے محور یا تراش کے مرکز ہندسی کے قریب ترین ہوتا ہے۔ اس مسئلے پر سان وینان[1] نے تحقیق کی ہے اور ایسی صورتوں کے لیے سادہ آزمائشی ضابطے وضع کیے ہیں جن میں زیادہ صحیح نتائج بہت پیچیدہ ہوتے ہیں۔ سان وینان کے کام کا بیان

[1] St Venant

ٹاڈھنٹر[1] اور پیرسن[2] کی کتاب "لچک کے نظریے کی تاریخ" جلد دوم حصہ اول میں ملیگا جس سے ذیل کی قیمتیں اخذ کی گئی ہیں ۔ ترقیم گزشتہ چار دفعات کی استعمال کی گئی ہے ۔

مربع تراش ـــ ضلع کا طول ض ۔ زور کی اعظم حدت ز ضلعوں کے وسط میں واقع ہوگی ۔

$$ت = ۲۰۸ء ض^۳ ز_ج \quad ....(۱)$$

جو اندرونی دائرے کے تناظر قیمت $\frac{۱۱}{۱۶}$ ز ج ص^۳ سے صرف تقریباً ۶ فی صدی زیادہ ہے ۔ اور

$$ط = ۱۱۴ء \frac{ت \times ل}{س \times ض^۴} = \frac{ت ل}{۸۴۴ء س جا} \quad ....(۲)$$

اس میں $جا = \frac{ض^۴}{۶}$

ناقصی تراش ـــ بڑا محور ا چھوٹا محور ب ۔ زور کی اعظم حدت ز ج چھوٹے محور کے سروں پر واقع ہوگی ۔

$$ت = \frac{۱۱}{۱۶} ا ب^۲ ز_ج \quad ....(۳)$$

$$ط = \frac{۱۶}{۱۱} \frac{(ا^۲ + ب^۲)}{ا^۳ ب^۳} \frac{ت ل}{س} \quad ....(۴)$$

مستطیلی تراش ـــ بڑا ضلع ا چھوٹا ضلع ب ۔ زور کی اعظم حدت ز ج بڑے ضلعوں کے وسطی نقاط پر واقع ہوگی ۔ صفحہ ۳۱۰

$$ت = \frac{ا^۲ ب^۲}{۳ ا + ۸ء۱ ب} \times ز_ج \text{ یا } \frac{ا ب^۲}{۳ + ۸ء۱ \frac{ب}{ا}} ز_ج \quad ....(۵)$$

اختیاری عددی سر

[1] Todhunter [2] Pearson

$$\frac{1}{3 + 1.8 \frac{ب}{ا}}$$

کی زیادہ صحیح قیمتوں کے لیے وہ جدول دیکھو جو ٹاڈھنٹر[1] اور پیرسن[2] کی کتاب "لچک کی تاریخ[3]" جلد دوم حصہ اول، صفحہ ۳۹ میں دی گئی ہے۔

کسی متشاکل تراش کے لیے جس میں مستطیل بھی شامل ہیں تقریباً۔

$$ط = \frac{۴۰ جا}{س ر^۲} \times \frac{ت ل}{س} \quad .... (۶)$$

جہاں س تراش کا رقبہ ہے اور جا قطبی معیارِ جمود ہے۔ ۴۰ کی بجائے مدور یا ناقصی تراش کے لیے صحیح عددی سر $۴ \pi^2$ ہے، اور ان مستطیلوں کے لیے، جن میں $\frac{ا}{ب} < ۳$، عددی سر تقریباً ۴۲ ہے۔

چابی راہ والے گول دُھرے — اگر ایک گول دُھرے میں ایک چابی راہ ہو جس کا عرض دُھرے کے قطر کا ع گنا ہو اور گہرائی گ گنی ہو تو لچکدار زور کی ایک دی ہوئی حد ز کے لیے اس دُھرے کی پیچیدگی سالم دُھرے کی حسبِ ذیل کسر لی جا سکتی ہے:۔

$$۱ - ۲.۰ ع - ۱.۱ گ$$

لچکدار انحراف حسبِ ذیل نسبت میں بڑھ جائیگا:۔

$$۱ + ۰.۴ ع + ۰.۷ گ$$

مثال ۱ — ایک دُھرے میں مروڑ کے جزی زور کی اعظم حدت معلوم کرو جس کا قطر ۳ انچ ہے اور جو ۵۰ ا۔ط کو ۸۰ چکر فی منٹ کی رفتار پر منتقل کر رہا ہے۔ اعظم مروڑ کا معیار اوسط سے ۴۰ فی صدی زیادہ ہے۔ اگر س = ۱۲ × $۱۰^۶$ پونڈ فی مربع انچ تو اعظم مروڑ درجے

[1] Todhunter [2] Pearson [3] History of Elasticity

فی فٹ طول میں معلوم کرو۔
مروڑ کا معیار پونڈ انچوں میں

$$ت = \frac{۱٫۴ \times ۵۰ \times ۱۲ \times ۳۳۰۰۰}{\pi ۲ \times ۸۰} = ۵۵۱۲۵ \text{ پونڈ انچ}$$

$$ز_ج = \frac{۱۶}{\pi} \times \frac{ت}{ق^۳} = \frac{۵۵۱۲۵ \times ۱۶}{\pi ۲۷} = ۱۰۴۰۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

مروڑ فی فٹ طول درجوں میں

$$طہٰ = \frac{۱۲ \times ۵۵۱۲۵}{۱۰^۶ \times ۱۲ \times ۸۱ \times \frac{\pi}{۳۲}} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۰٫۳۹۸^\circ$$

مثال ۲ ـــ ایک ٹھوس گول دُھرے کی بجائے ایک کھوکھلا دُھرا استعمال کیا جا رہا ہے جس کا بیرونی قطر، اندرونی قطر کا $\frac{۱}{۴}$ ۱ گنا ہے۔ دونوں میں مروڑ کے زور کی ایک ہی حدت جائز رکھی جائے تو ٹھوس اور کھوکھلے دُھروں کے وزن اور صلابت کا مقابلہ کریں۔

فرض کرو کہ ٹھوس دُھرے کا قطر ق ہے اور کھوکھلے کا بیرونی قطر ق ہے۔ صفحہ ۳۱۱
مساوی مضبوطی کے لیے

$$ق^۳ = \frac{ق^۴ - (۰٫۸ ق)^۴}{ق} = (۱ - ۰٫۴۰۹۶) ق^۳$$

$$\frac{ق}{ق} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۰٫۵۹۰۴}} = \sqrt[۳]{۱٫۶۹۹} = ۱٫۱۹۲$$

وزنوں کی نسبت

$$\frac{\text{ٹھوس}}{\text{کھوکھلا}} = \frac{۱}{(۱٫۱۹۲)^۲ (۱ - ۰٫۸^۲)} = ۱٫۹۶$$

صلابت کی نسبت

$$\frac{\text{کھوکھلا}}{\text{ٹھوس}} = \frac{(۱٫۱۹۲)^2 (۱ - ۸^4)}{۱} = ۱٫۱۹۱$$

۱۱۳ ۔ خماؤ اور مروڑ دونوں ــــــ گزشتہ دفعات میں یہ مانا گیا ہے کہ دُھروں پر ایک محوری جفت عمل کررہا ہے جس سے صرف مروڑ کا جزئی زور پیدا ہورہا ہے ۔ لیکن عملاً تقریباً تمام دُھروں پر ان کے ذاتی وزن یا چرخیوں کے وزن یا کرینکوں اور تسموں کے دھکیل یا کھنچاؤ کی وجہ سے خماؤ کا عمل بھی واقع ہوتا ہے ۔ اس طرح دُھرے میں زور کے اجزائے ترکیبی یہ ہونگے (۱) مروڑ کا جزئی زور محور کے علی القوائم مستویوں اور محور میں سے گزرنے والے مستویوں پر (۲) تنشی اور فشاری خماؤ کے زور محور کے متوازی (۳) خماؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والے جزئی زور محور کے متوازی مستویوں اور علی القوائم مستویوں پر ۔ دُھرا بہت چھوٹا نہ ہو تو اعظم صدر زور عموماً دُھرے کے محیط پر واقع ہونگے جہاں مقابل پہلوؤں پر تنشی اور فشاری زور مساوی اور مخالف اعظم قیمت کو پہنچتے ہیں ۔ اس صورت میں خماؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والے جزئی زور کا لحاظ غیر ضروری ہے کیونکہ یہ محیط پر صفر ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۷۱) ۔ بہت چھوٹے دُھروں میں یہ ہوسکتا ہے کہ خماؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والا جزئی زور محور کے متوازی راست زور سے زیادہ اہم ہو ۔ اس صورت میں سب میں بڑا خاص زور تراش کے اندر واقع ہوسکتا ہے ۔ لیکن بالعموم اعظم صدر زور محیط پر ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ خماؤ کے طولی زور کی مساوی اور مخالف انتہائی حدت جو کسی تراش کے قطر کے سروں پر واقع ہوتی ہے ز ہے ۔ تب

$$ز = \frac{م}{مق} = \frac{۳۲ م}{\frac{۲۲}{۷} ق^3}$$ (دفعات ۶۳ اور ۶۶) .... (۱)

جہاں مق = $\frac{۲۲}{۳۲}$ ق۳ قطر ق کے ایک گول دُھرے کی تراش کا مقیاس ہے

اور م خماؤ کا معیار ہے۔ فرض کرو کہ مروڑ کے جزی زور ج کی انتہائی قیمت جو محیط پر واقع ہوتی ہے $ن_ج$ ہے۔ تب

$$\text{ن}_\text{ج} = \frac{\text{۱۶ ت}}{\pi\ \text{ق}^{\text{۳}}} \quad (\text{دفعہ ۱۰۹ (۱)}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

صفحہ ۳۱۲

صدر زوروں کی حدتیں دفعہ ۱۸ کی طرح معلوم کی جا سکتی ہیں۔ اعظم صدر زور کی قیمت یہ ہوگی:۔

$$\text{ن}_\text{ا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ز} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ز}^2 + \text{ن}_\text{ج}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

یہ کھال کے اس پہلو پر تنشی ہوگا جس پر خماؤ کا اعظم تنشی زور واقع ہوتا ہے اور اس کے عین مقابل فشاری ہوگا۔ ز اور $ن_ج$ کی اوپر کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{ن}_\text{ا} = \frac{\text{۱۶}}{\pi\ \text{ق}^{\text{۳}}} \left(\text{م} + \sqrt{\text{م}^2 + \text{ت}^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

یا

$$\text{ن}_\text{ا} = \frac{\text{۳۲}}{\pi\ \text{ق}^{\text{۳}}} \left\{\tfrac{1}{2}\left(\text{م} + \sqrt{\text{م}^2 + \text{ت}^2}\right)\right\} \ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

(۵) سے ظاہر ہے کہ اگر خماؤ کا معیار

$$\text{م}_\text{ع} = \tfrac{1}{2}\left(\text{م} + \sqrt{\text{م}^2 + \text{ت}^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

اکیلا عمل کرے تو اس سے تنشی اور فشاری زور کی وہی اعظم حدت ($ن_ا$) پیدا ہوگی جو م اور ت کے مل کر عمل کرنے سے پیدا ہوتی ہے۔ اس وجہ سے اس کو معادل خماؤ کا معیار کہا جاتا ہے اور یہ صریحاً کھوکھلے دھرے کے لیے بھی درست ہے۔

چونکہ خماؤ اور مروڑ کا اجتماع مرکب زور کی ایک اہم صورت ہے اس لیے یہ دیکھنا فائدے سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ۲۵ میں جو چار مفروضے بیان کیے گئے ہیں اُن سے مجوزہ کے "معادل" کیا پیدا ہوتے ہیں۔

اگر لچکدار ناکارگی کے لیے خاص راست فساد پر غور کیا جائے اور پوائی سن کی نسبت ۱/۴ لی جائے تو دفعہ (۲۵) کی مساوات (۲) سے معادل خماؤ کا معیار حسبِ ذیل ہوگا :-

$$\frac{3}{8}\,\text{ھ} + \frac{5}{8}\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{دت}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

جو (۶) کے ھ‌ع سے زیادہ ہے۔ اگر (۶) کی قیمت استعمال کی جائے تو زور کی حدت کی کافی قیمت (۷) کے مقابلے میں ذرا پست تر اختیار کرنی چاہیے (دیکھو دفعہ ۲۵)۔ اور اگر اعظم جزی زور پر غور کیا جائے جو حسبِ ذیل ہے :-

$$\sqrt{\frac{1}{4}\text{ز}^2 + \text{زح}^2} \quad \text{یا} \quad \frac{16}{\pi\,\text{ق}^3}\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{دت}^2}$$

تو معلوم ہوا کہ اگر مڑوڑ کا معیار

$$\text{ت}_{\text{ع}} = \sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ت}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

اکیلا عمل کرے تو جزی زور کی وہی اعظم حدت پیدا کریگا جو ھ اور ت مل کر پیدا کرتے ہیں اور اس طرح اس کو معادل مروڑ کا معیار کہنا نامناسب نہ ہوگا۔ اگر وہ زاویہ جو خاص زور کا محور دھرے کے محور سے بناتا ہے یا جو خاص مستوی تراش سے بناتا ہو ط ہو تو (۳) دفعہ ۱۷ سے

$$\text{مس}\ 2\,\text{ط} = \frac{2\,\text{زح}}{\text{ز}} = \frac{\text{ت}}{\text{ھ}}$$

صفحہ ۳۱۳ اگر ناکارگی کے لیے اعظم لچکدار فسادی توانائی پر غور کیا جائے تو (۵) دفعہ ۴۲ سے تو وہ سادہ زور جس سے یہی فسادی توانائی پیدا ہوگی

$$\sqrt{\text{ز}^2 + \text{زح}^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ش}}{\text{س}}\sqrt{\text{ز}^2 + 2\,\text{زح}^2\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

ہوگا اور وہ خماؤ کا معیار جس سے یہ زور اور یہ فسادی توانائی پیدا ہوں

$$\frac{1}{2}\sqrt{ھ^2+\frac{ت^2 ے}{4 س}} \quad یا \quad \frac{1}{2}\sqrt{ھ^2+\frac{1}{4}ت^2\left(1+\frac{1}{م}\right)} \quad \ldots\ldots(۱۰)$$

ہوگا ۔ اور یہ اس مفروضے کے نقطۂ نظر سے معادل خماؤ کا معیار ہوگا اور متعدد اشیا میں تجرباتی واقعات سے سب میں قریب یہی ہے ۔

۱۱۴ ۔ سروں کے ڈھکیل کا اثر ــــ اگر خماؤ اور مروڑ کی قوتوں کے علاوہ ایک محوری ڈھکیل یا کھنچاؤ بھی ہو تو صدر زور معلوم کرنے سے پہلے محوری قوت سے پیدا ہونے والے زور کی حدت کو خماؤ کے طولی راست زور میں جبری طور پر جمع کرنا چاہیے ۔ محوری ڈھکیل ف ہو تو طولی فشاری زور کی انتہائی حدت

$$ز_ن = \frac{ھ}{مق} + \frac{ف}{ر}$$

ہوگی جہاں ر تراش کا رقبہ ہے اور ھ اس پر خماؤ کا معیار ۔ فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرنے کے لیے مساوات (۳) میں ز کی بجائے یہ $ز_ن$ استعمال کرنا چاہیے ۔

طولی تنشی زور کی انتہائی حدت

$$ز_ت = \frac{ھ}{مق} - \frac{ف}{ر}$$

ہوگی ۔ اگر یہ مثبت ہو تو مساوات (۳) میں ز کی بجائے اس کو درج کرنے سے تنشی خاص زور کی اعظم حدت معلوم ہوگی ۔

مثال ۱ ــــ ۳ انچ قطر کے ایک دھرے پر ایک ۴۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک مروڑ کا معیار اور ایک ۱۰۰۰۰ پونڈ انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے ۔ اعظم خاص زور معلوم کرو ۔ اگر پوائسن کی نسبت $\frac{1}{۴}$ ہو تو وہ راست زور معلوم کرو جو اکیلا عمل کرکے یہی اعظم فساد پیدا کریگا ۔

مروڑ کے جزی زور کی حدت

$$ز_چ = \frac{۱۶ \times ۴۰۰۰۰}{۲۷ \times \pi} = ۷۵۴۴ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

کھاؤ کے زور کی حدت

$$ز = \frac{۳۲ \times ۱۰۰۰۰}{۲۷ \times \pi} = ۳۷۷۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم صدر زور کی حدت

$$= \frac{۱}{۲} ز + \sqrt{\frac{۱}{۴} ز^۲ + ز_چ^۲} = ۱۸۸۶ + ۱۰۰\sqrt{۳۵۶ + ۵۶۹۴}$$

$$= ۹۶۶۴ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اقل صدر زور کی حدت

$$= ۱۸۸۶ - ۱۰۰\sqrt{۳۵۶ + ۵۶۹۴} = -۵۸۹۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم فساد اعظم صدر زور کی سمت میں (دیکھو دفعہ ۱۹)

صفحہ ۳۱۲

$$= \frac{۱}{ے}\left(۹۶۶۴ + \frac{۵۸۹۲}{۴}\right) = \frac{۱۱۱۳۷}{ے}$$

اس فساد کو پیدا کرنے کے لیے مطلوبہ راست زور = ۱۱۱۳۷ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۲ ــــ ایک دامر کے دھرے پر ایک ۱۸۰ ٹن فٹ کا مروڑ کا معیار، ۴۰ ٹن فٹ کا کھاؤ کا معیار، اور ۳۰ ٹن کا ایک راست دھکیل عمل کرتا ہے۔ اگر اس کا بیرونی قطر ۱۶ انچ اور اندرونی قطر ۸ انچ ہو تو فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

تراش کا قطبی مقیاس

$$\frac{\pi}{۱۶} \cdot \frac{۱۶^۴ - ۸^۴}{۱۶} = ۲۴۰\pi = ۷۵۵ \text{ (انچ)}^۳$$

اور "کھاؤ کا مقیاس" اس کا نصف ہوگا۔

کسی تراش میں مروڑ کا اعظم جزی زور

ز ج = ۱۲×۱۸۰ / ۷۵۵ = ۲٫۸۶ ٹن فی مربع انچ

تناؤ کا اعظم زور

= ۲×۱۲×۴۰ / ۷۵۵ = ۱٫۲۷ ٹن فی مربع انچ

اور دھکیل کی وجہ سے فشار

= ۳۰ / (۱۹۲ × ۰٫۷۸۵۴) = ۰٫۲۰ ٹن فی مربع انچ

محور کے متوازی راست فشار

= ۱٫۲۷ + ۰٫۲۰ = ۱٫۴۷ ٹن فی مربع انچ

اس لیے اعظم فشاری (خاص) زور

= ۰٫۷۳۵ + √((۰٫۷۳۵)² + (۲٫۸۶)²) = ۳٫۶۸۸ ٹن فی مربع انچ

۱۱۵ - لچک کی حد کے باہر مروڑ —— اگر مروڑ کا جفت بتدریج بڑھتا جائے یہاں تک کہ شکستگی واقع ہو تو دھاتیں، خواہ متمدد ہوں یا پھوٹک، جن خواص کا اظہار کرتی ہیں وہ تنشی امتحان کے بہت مشابہ ہوتے ہیں۔ اگر مروڑ کے معیاروں کو کسی مقررہ طول کے زاویئہ انصراف کی اساس پر ترسیم کیا جائے تو جو نقشہ حاصل ہوگا وہ تناؤ اور تطوّل کے نقشے کے بہت مشابہ ہوگا (دیکھو شکل ۳۱)۔ متمدد دھاتوں کی صورت میں مروڑ کے امتحان کا نقطۂ مغلوبیت، اور زاویئہ فساد کی مروڑ کے معیار کے ساتھ تناسبیت خاص کر ٹھوس سلاخ میں تنشی امتحان کے مقابلے میں کم نمایاں ہوتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ ساری شے زور کی اس

حدت پر ایک وقت میں نہیں پہنچتی، بیرونی پرت پہلے پہنچتے ہیں اور فسادی عمل جیسے جیسے بڑھتا ہے پیکر پذیر حالت محور کی طرف پھیلتی ہے۔ نقطۂ مغلوبیت ایک پتلی کھوکھلی نلی کی صورت میں زیادہ صفائی سے مشاہدے میں آئیگا۔ چونکہ تراش میں کوئی قابلِ لحاظ گھٹاؤ واقع نہیں ہوتا اس لیے منحنی میں ویسا کوئی "جھوک" نہیں ہوتا جیسا کہ تنشی امتحان میں مقامی سکڑاؤ کی وجہ سے ہوتا ہے۔ لیکن منحنی فساد، کے محور یعنی اساس کے تقریباً متوازی ہو جاتا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ شے تقریباً کامل پیکر پذیر ہو گئی ہے۔ ایسی صورت میں جزی زور کی حدت سلاخ کے محور سے فاصلے کے متناسب ہونے کی بجائے تراش پر تقریباً یکساں ہوتی ہے اور مروڑ کے معیارت اور جزی زور کی انتہائی حدت $ز_ج$ اور نصف قطر ر یا $\frac{ق}{۲}$ میں ربط (۱) دفعہ ۱۰۹ کی بجائے حسبِ ذیل ہوتا ہے:—

صفحہ ۲۱۵

$$ف = ۲\pi\, ز_ج \int_{۰}^{ر} ر^۲\, د ر = \frac{۲}{۳}\pi\, ز_ج\, ر^۳ \text{ یا } \frac{\pi}{۱۲}\, ز_ج\, ق^۳$$

شکستگیاں —— متمدد اشیا میں شکستگی عموماً تقریباً مستوی اور مروڑ کے محور کے علی القوائم ہوتی ہے۔ بھُربھُری اشیا میں، جیسا کہ ڈھلا لوہا ہے، جن میں مروڑ کے تحت شکستگی تناؤ کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، شکستگی کی سطح مستوی سطح کو ایک منتظم مرغولے میں ملتی ہے جو نمونے کے محور سے ۴۵° کا میلان رکھتا ہے کیونکہ یہ سمت تنشی خاص زور کی سمت کے علی القوائم ہوتی ہے (دیکھو دفعات ۸ اور ۱۰۸ اور شکل ۲۱۹)۔

دیگر مظاہر —— زور کی وجہ سے نقطۂ مغلوبیت کا بڑھ جانا، مدت کے ساتھ لچک کی بازیابی، اور اسی طرح کے دیگر اثرات جو ابتدائی نقطۂ مغلوبیت سے زیادہ فساد کے تحت آئی ہوئی اشیا میں ظاہر ہوتے ہیں اور جس طرح تناؤ کے تجربات میں ظاہر ہوتے ہیں مروڑ کے فساد میں بھی تقریباً اسی طرح مشاہدے میں آتے ہیں۔ اس قسم کے متفرق تجربات کا ایک بیان ڈاکٹر کوکر کا لکھا ہوا

Dr. E. G. Coker سے

Phil. Trans. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. XI. Part ii. No. 14. میں ملیگا۔

۱۱۶ ۔ مروڑ کی بازگشتگی ۔۔ اگر کسی شے میں جزی زور کی ایک یکساں حدت ج ہو تو اس کی لچکدار فسادی توانائی

$$\frac{1}{2}\frac{ج^2}{س}$$

فی اکائی حجم ہوتی ہے (دفعہ ۹۵) ۔ اب اگر ایک ٹھوس دھرے پر غور کیا جائے جس میں لچک کی حد کے اندر مروڑ کا فساد واقع ہو تو نصف قطر ر، موٹائی فر ر، اور طول ل کے ایک پتلے نلواں حصے کی جزی بازگشتگی

$$= \frac{1}{2}\frac{ج^2}{س} \times 2\pi\, ل\, ر\, .\, فر$$

جہاں $$ج = \frac{ر}{ر_1}\, .\, ز_ج$$

اور زج بیرونی نصف قطر ر۱ پر جزی زور کی حدت ہے ۔ اس طرح دھرے کی مجموعی مروڑ کی بازگشتگی

$$= \frac{\pi\, ل}{س}\int_0^{ر_1} ج^2\, ر\, فر = \frac{\pi\, ل}{س} \times \frac{ز_ج^2}{ر_1^2}\int_0^{ر_1} ر^3\, فر$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\pi\, ر_1^2\, ل\, ز_ج^2}{س} = \frac{1}{4}\frac{ز_ج^2}{س} \times حجم \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

صفحہ ۳۱۶

اسی طرح ایک کھوکھلے اُستوانی دھرے کی مروڑ کی بازگشتگی جس کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر علی الترتیب ر۱ اور ر۲ ہوں حسب ذیل ہوگی :۔۔

$$\frac{\pi\, ل}{س}\, .\, \frac{ز_ج^2}{ر_1^2}\int_{ر_2}^{ر_1} ر^3\, فر = \frac{\pi\, ل}{4\, س}\, .\, \frac{ز_ج^2}{ر_1^2}\left(ر_1^4 - ر_2^4\right)$$

tubular ھ

$$= \frac{\text{ر}_2^2 + \text{ر}_1^2}{\text{ر}_2^2} \times \frac{1}{4} \frac{\text{ز}^2_{\text{نچ}}}{\text{س}} \times \text{حجم} \quad ....(۲)$$

اگر ر۱، ر۲ کے قریب پہنچے یعنی اس صورت میں کہ نلی بہت پتلی ہو اور اس طرح جزی زور کی حدت تقریباً یکساں ہو بازگشتگی کی قیمت $\frac{1}{2} \frac{\text{ز}^2_{\text{نچ}}}{\text{س}}$ فی اکائی حجم کے قریب آئیگی ۔

اگر (۱) اور (۲) میں زنچ جزی زور کی لچک کی حد کو تعبیر کرے تو اوپر کے جملوں کو دفعہ ۲۴ کے طریق تسمیہ کے مطابق مروڑ کی برداشتنی بازگشتگی کہا جا سکتا ہے ۔

اوپر کے نتائج حاصل کرنے کا ایک متبادل طریقہ یہ ہوگا کہ مروڑ میں کیے ہوئے کام کے یعنی مروڑ کے معیار اور مروڑ کے زاویے کے حاصل ضرب کے نصف کے جملے

$$\frac{1}{2} \text{ت ط}$$

میں ت اور ط کی قیمتیں ٹھوس اُستوانی دُھرے کے لیے دفعہ ۱۰۹ کی مساواتوں (۱) اور (۳) سے اور کھوکھلے دُھرے کے لیے تناظر قیمتیں دفعہ ۱۱۱ سے مندرج کریں ۔

یہ طریقہ دیگر تراشوں کے لیے بھی موزوں ہے جن میں زور کی تقسیم اتنی سادہ نہیں مثلاً مربع دُھرا ۔ دفعہ ۱۱۲ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے بازگشتگی

$$\frac{1}{2}\text{ت ط} = \frac{1}{2} \times ۱۱۰۷ \times \frac{\text{ت}^2\text{ل}}{\text{س ض}^4} = \frac{۱۱۰۷}{۲} \times \frac{(۲۰۸ء)^2 \text{ض}^2 \text{ز}^2_{\text{نچ}}\text{ل}}{\text{س}}$$

$$= ۱۵۴ء \frac{\text{ز}^2_{\text{نچ}}}{\text{س}} \times \text{ض}^2\text{ل} = ۱۵۴ء \frac{\text{ز}^2_{\text{نچ}}}{\text{س}} \times \text{حجم} \quad ....(۳)$$

یہی طریقہ دفعہ ۱۱۲ میں دی ہوئی دوسری تراشوں کے لیے بھی اختیار کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۷۔ مرغولی کمانیاں، تنگ لچھے دار۔

(ا) محوری بوجھ۔ اگر ایک مرغولی کمانی ایسی تنگ لپیٹی ہوئی ہو کہ ہر ایک لچھا تقریباً ایک مستوی میں ہو جو مرغولے کے محور کے علی القوائم ہو تو جب کمانی پر ایک محوری کھینچ یا دھکیل عمل کرنے تو سمجھا جا سکتا ہے کہ کمانی کے مادے میں صرف مروڑ کا عمل ہو رہا ہے۔ مرغولے کے تار پر مروڑ کا معیار محوری قوت اور اس استوانی سطح کے نصف قطر کا جس میں مرغولہ یعنی تار کا مرکزی خط واقع ہے (یعنی لچھوں کے اوسط نصف قطر کا) حاصل ضرب ہوگا۔ اگر مرغولہ "تنگ لچھے دار" نہ ہو تو محوری قوت سے تار کے مروڑ کے علاوہ لچھوں کا خماؤ بھی واقع ہوتا ہے اور بہر صورت تار کی ہر تراش پر مروڑ سے پیدا ہونے والے جزنکے علاوہ ایک اور جزی قوت محوری بوجھ کی وجہ سے ہوگی۔ لیکن اکثر صورتوں میں مروڑ کا فساد خماؤ یا جزنکے اثرات سے اتنا زیادہ ہوتا ہے کہ مروڑ کے سوا دوسرے فسادات کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

ایک تنگ لچھے دار مرغولے پر غور کرو جس کے لچھوں کا اوسط نصف قطر م ہے اور جو قطر ق کے مدور تار سے بنا ہے اور فرض کرو کہ اس پر ایک محوری بوجھ و ہے جو فرض کرو کہ تنشی ہے (دیکھو شکل ۱۵۲)۔ فرض کرو کہ مکمل لچھوں کی تعداد ن ہے اور تار کا مجموعی طول ل ہے یعنی لچھوں کے تنگ ہونے کی وجہ سے

صفحہ ۳۱۷

$$ل = ۲\pi م ن \quad (\text{تقریباً})$$

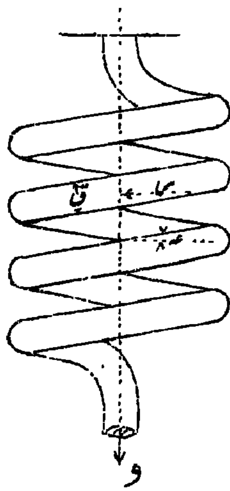
اور فرض کرو کہ استواری کا مقیاس یا جزی مقیاس پونڈ فی مربع انچ میں س ہے۔ پورے تار پر ایک مروڑ کا معیار

$$ت = و م$$

عمل کر رہا ہے اور اگر ایک سرا مضبوط ثابت ہو تو دوسرا ایک زاویہ طہ میں گھومیگا (دفعہ ۱۰۹ مساوات (۳))۔

$$\text{طہ} = \frac{\text{ت ل}}{\text{س جا}} = \frac{۳۲ \text{ ت ل}}{\pi \text{ ق}^۴ \text{ س}} = \frac{۳۲ \text{ و}\, \text{ر} \text{ ل}}{\pi \text{ ق}^۴ \text{ س}} \text{ نیم قطری} \quad \text{......(۱)}$$

یا $\frac{\text{ت}}{\text{س جا}}$ نیم قطری فی اکائی طول۔



شکل ۱۵۴

اس طرح آزاد سرے پر ایک محوری حرکت ر۔ طہ ہوگی جو آسانی سے اس طرح سمجھ میں آسکتی ہے کہ مجموعی طول کے کسی چھوٹے حصے کے دونوں سروں پر کی مروڑ کے فرق کی وجہ سے آزاد سرے کی جو محوری حرکت ہوتی ہے اس پر غور کریں اور پھر چونکہ ایک سرا ثابت ہے اس لیے ساری محوری حرکت آزاد سرے پر واقع ہونی چاہیے۔ اگر آزاد سرے کی محوری حرکت یا انصراف صہ ہو تو

$$\text{صہ} = \text{ر} \times \text{طہ} = \frac{۳۲ \text{ و}\, \text{ر}^۲ \text{ ل}}{\pi \text{ ق}^۴ \text{ س}} \text{ یا } \frac{۶۴ \text{ و}\, \text{ر}^۳ \text{ ن}}{\text{ق}^۴ \text{ س}} \text{ انچ} \quad \text{..........(۲)}$$

اس کو نہایت آسانی سے اس طرح بھی حاصل کر سکتے تھے کہ مروڑ کی بازگشتگی یعنی مروڑ کے معیار کے کیے ہوئے کام کو بیرونی کام کے مساوی رکھیں جو محوری قوت اور انصراف کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے۔ اس طرح

$$\tfrac{۱}{۲} \text{ و} \times \text{صہ} = \tfrac{۱}{۲} \text{ ت طہ} = \tfrac{۱}{۲} (\text{و ر}) \frac{۳۲ \text{ و}\, \text{ر} \text{ ل}}{\pi \text{ ق}^۴ \text{ س}} \quad \text{........(۳)}$$

اور

$$\text{صہ} = \frac{۳۲ \text{ و}\, \text{ر}^۲ \text{ ل}}{\pi \text{ ق}^۴ \text{ س}} \text{ یا } \frac{۶۴ \text{ و}\, \text{ر}^۳ \text{ ن}}{\text{ق}^۴ \text{ س}} \text{ (حسب سابق)}$$

بازگشتگی انچ پونڈوں میں حسبِ ذیل ہے:—

$$\frac{16\,\text{و}^{2}\,\text{ر}^{2}\,\text{ل}}{\pi\,\text{ق}^{4}\,\text{س}}\ \text{یا}\ \frac{1}{4}\,\frac{\text{ز}_{\text{ج}}^{2}}{\text{س}}\times\text{حجم}$$ (دفعہ ۱۴۶ کی طرح)

کیونکہ $\text{ز}_{\text{ج}}=\frac{16}{\pi\,\text{ق}^{3}}\,\text{و}\,\text{ر}$ دفعہ ۱۰۹ مساوات (۱) کی طرح۔

کھوکھلی مدور تراش کی یعنی نلی کی بنی ہوئی کمانی کے انصراف اسی طرح دفعہ ۱۱۱ کی مساواتوں (۱) اور (۲) کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

کمانی کی صلابیت کی (پونڈوں میں) یہ تعریف کی جاسکتی ہے کہ یہ قوت فی اکائی انصراف ہے اور و ایک پونڈ ہو تو $\frac{1}{\text{صہ}}$ کے مساوی ہے۔ صفحہ ۲۱۸ اگر اوپر کے ضابطوں میں طول اکائی انچ ہو (جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے) تو قوت فی فٹ انصراف کو ص لیا جاسکتا ہے جہاں

$$\text{ص}=\frac{12\,\pi\,\text{ق}^{4}\,\text{س}}{32\,\text{ر}^{2}\,\text{ل}}=\frac{3\,\pi\,\text{ق}^{4}\,\text{س}}{8\,\text{ر}^{2}\,\text{ل}}$$

جس کی اکائیاں وہی ہیں جو ارتعاشوں کی حرکیات کی بحث میں عام طور پر مستعمل ہیں۔

مربع تراش کی صورت میں

$$\text{صہ}=\text{ر}\,\text{طہ}=\text{۷ء۱۱}\,\frac{\text{و}\,\text{ر}^{2}\,\text{ل}}{\text{س}\,\text{ض}^{4}}$$

اور بازگشتگی دفعہ گزشتہ کی طرح $\text{۱۵۴ء}\,\frac{\text{ز}_{\text{ج}}^{2}}{\text{س}}$ فی اکائی حجم ہوگی۔

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اوپر کی تمام صورتوں میں جزی زور کی ایک دی ہوئی حدت کے لیے بازگشتگی فی اکائی حجم اُس سے بہت زیادہ ہوتی ہے جو یکساں تناؤ کے لیے یا خمیدہ شہتیروں میں۔ اسی زور کی اسی عددی حدت کے لیے (دفعہ ۹۳) حاصل ہوتی ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ فولاد کے لیے س کی قیمت ے کی تقریباً صرف $\frac{2}{5}$ ہوتی ہے اور عددی

بھی مروڑ میں خماؤ سے زیادہ ہے کیونکہ اکثر صورتوں میں جو عام طور پر واقع ہوتی ہیں اشیا میں مروڑ میں زور زیادہ یکساں ہوتا ہے ۔جس فولاد سے بالعموم کمانیاں بنائی جاتی ہیں اُس کی لچک کی حد اعلیٰ ہوتی ہے اور اس کے تناسب سے فسادی توانائی جمع کرنے کی قابلیت بھی زیادہ ہوتی ہے ۔چھوٹے تار کمانیوں کے لیے مناسب طور پر آب دادہ[۵] ہوں تو ان کے لیے جزئی زور کی بے خطر کامی قیمت ۳۰ ٹن فی مربع انچ سے اونچی ہوتی ہے ۔

(ب) محوری مروڑ۔ اگر ایک تنگ لچھے دار کمانی کو ایک سرے پر ثابت کیا جائے اور مرغولے کے محور کے گرد ایک مروڑ کا جفت م لگایا جائے تو آزاد سرا جس پر یہ جُفت لگایا جاتا ہے ایک مقدار کے بقدر مروڑا جاتا ہے جو اس جفت کے متناسب ہوتی ہے ۔لچھوں کے خفیف ترچھے پن کو نظر انداز کریں تو ایک یا متعدد لچھوں پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ مرغولے کے تار کو ہر عمادی تراش پر ایک خماؤ کے معیار م کی مزاحمت کرنی ہوتی ہے جو مرغولے کے لچھوں کو اور زیادہ موڑنا یا کھولنا چاہتا ہے یعنی ان کے انحنا کو بڑھانا یا گھٹانا چاہتا ہے بلحاظ اس کے جفت کس سمت میں لگایا گیا ہے ۔ اگر ہم بطور ایک تقرب کے یہ فرض کریں کہ لچھے جن کا ابتدائی انحنا خاصاً ہے ایک شہتیر کا عمل کرتے ہیں جس کا ابتدائی انحنا صفر ہو اور یہ کہ دفعات ۶۱ اور ۶۴ کے ربط درست رہتے ہیں تو

خماؤ کا معیار م = آ سے × (انحنا کی تبدیلی) ۔۔۔۔۔۔ (۴)

جہاں آ تراشش کا معیارِ جمود تراش کے تعدیلی محور کے گرد ہے جو تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہے اور مرغولے کے محور کے متوازی ہے ۔اگر لچھے کا نصف قطر، تار کے تراشی ابعاد سے بہت بڑا ہو تو اوپر کا مفروضہ بہت قریباً صحیح ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۹) ۔اگر خماؤ کا معیار انحنا کو بڑھائے اور لچھوں کا اوسط نصف قطر ر سے گھٹ کر ر۱ ہو جائے اور ان کی تعداد ن سے بڑھ کر ن۱ ہو جائے تو ۲ π ن ر = ۲ π ن۱ ر۱ = ل اور

$$\text{مر} = \text{آسے}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}_2}\right) = \frac{2\pi\ \text{آسے}\ (\text{نَ} - \text{ن})}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots (5)$$

اور آزاد سرے کا مجموعی مروڑ فہ نیم قطریوں میں

$$\text{فہ} = 2\pi\ (\text{نَ} - \text{ن}) = \frac{\text{مر ل}}{\text{آسے}}\ (\text{نیم قطری}) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

صفحہ ۳۱۹

یہ نتیجہ بازگشتگی سے آسانی سے نکالا جاسکتا ہے کیونکہ مساوات (۷) دفعہ ۹۴ سے

$$\frac{1}{2}\ \text{مر فہ} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{مر}^2\ \text{ل}}{\text{آسے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

اس لیے

$$\text{فہ} = \frac{\text{مر ل}}{\text{آسے}}$$

انحنا کی تبدیلی یعنی مزید موڑ فی اکائی طول

$$\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}_2}\ \ \text{یا}\ \ \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرل}}$$

سارے طول میں یکساں ہے اور (۵) یا (۶) سے اس کی مقدار $\frac{\text{مر}}{\text{آسے}}$ ہوگی۔

ٹھوس مدور تراش اور قطر ق کے تار کے لیے (۶) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے:-

$$\text{فہ} = \frac{64\ \text{مر ل}}{\pi\ \text{سے ق}^4}\ \ \text{یا}\ \ \frac{128\ \text{مر ر ن}}{\text{سے ق}^4}\ \ \text{نیم قطری} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

اور خماؤ کے راست زور کی حدت کی انتہائی قیمت

$$\text{ز} = \frac{32\ \text{مر}}{\pi\ \text{ق}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ضلع ض کی مربع تراش کے لیے (۶) حسب ذیل ہوگی :-

$$ فہ = \frac{۱۲ ھ ل}{ے ض^۴} \text{ یا } \frac{۳۲۴ ھ ر ن}{ے ض^۴} \qquad (۱۰) $$

اور

$$ ز = \frac{۶ ھ}{ض^۳} \qquad (۱۱) $$

بازگشتگی ــــ مدور تراش کے لیے بازگشتگی یہ ہے :-

$$ \frac{۱}{۸} \frac{ز^۲}{ے} \text{، فی اکائی حجم} $$

اور مستطیلی تراش کے لیے

$$ \frac{۱}{۶} \frac{ز^۲}{ے} \text{ فی اکائی حجم (دیکھو دفعہ ۹۲)} $$

۱۱۸ ـ کشادہ لچھوں کی مرغولی کمانی ــــ

(ا) محوری بوجھ و ــــ دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے ساتھ فرض کرو کہ لچھے مرغولے کے محور کے علی القوائم مستویوں سے ہر جگہ زاویہ عہ بناتے ہیں (دیکھو شکل ۱۵۵ ا جس کا مستوی اُس اُستوانی سطح کا جس میں تار کا مرغولی مرکزی خط واقع ہے ایک مماسی مستوی ہے) - تب ن لچھوں کا طول

$$ ل = ۲ \pi ر ن قط عہ $$

اب محوری قوت و کا ہ لا کے گرد ہ پر کی عادی تراش پر جو معیار و ر ہے اس کو دو معیاروں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے :

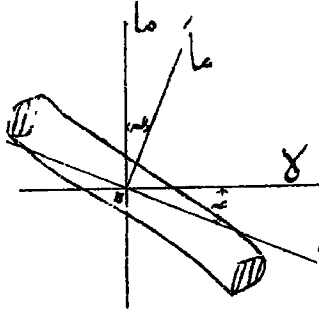
$$ ت = و ر جتم عہ $$

اور

$$ م = و ر جیب عہ $$

پہلے جزوِ تحلیلی سے ہ لا کے گرد ایک مروڑ کا معیار تار کے مرکزی خط کے

مماساً حاصل ہوگا اور دوسرے سے ہ مَا کے گرد ایک خماؤ کا معیار حاصل ہوگا جو تار کے محور کے علی القوائم اور شکل ۱۵۵ کے مستوی میں ہوگا۔



شکل ۱۵۵

اگر صرف محوری تطول مطلوب ہو تو اسے نہایت آسانی سے فسادی توانائی کے ذریعے دفعہ گزشتہ کے (۳) اور (۷) کی مدد سے نکالا جا سکتا ہے۔ قطر ق کے ایک مدور تار کے لیے

$$\frac{1}{2}\,و\,صہ = \frac{1}{2}\,تَ\,طَہ + \frac{1}{2}\,مَر\,فَہ$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{تَ^{2}\,ل}{س\,جا} + \frac{1}{2}\,\frac{مَر^{2}\,ل}{آ\,ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں طَہ اور فَہ آزاد سرے کے زاویئی ہٹاؤ ایسے محوروں کے گرد ہیں جیسے کہ علی الترتیب ہ لاَ اور ہ مَا ہیں۔ اس طرح

$$و\,صہ = \frac{ل\,و^{2}\,مر^{2}\,جم^{2}\,عہ}{س\,جا} + \frac{ل\,و^{2}\,مر^{2}\,جب^{2}\,عہ}{آ\,ے}$$

اور —

$$صہ = و\,ل\,مر^{2}\left(\frac{جم^{2}\,عہ}{س\,جا} + \frac{جب^{2}\,عہ}{آ\,ے}\right) \text{ یا } ۲\,و\,\pi\,مر^{2}\,ن\,قطعہ$$

$$\left(\frac{جم^{2}\,عہ}{س\,جا} + \frac{جب^{2}\,عہ}{آ\,ے}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$صہ = \frac{۳۲\,و\,ل\,مر^{2}}{\pi\,ق^{4}}\left(\frac{جم^{2}\,عہ}{س} + \frac{۲\,جب^{2}\,عہ}{ے}\right) = \frac{۶۴\,و\,مر^{2}\,ن\,قطعہ}{ق^{3}}$$

$$\left(\frac{جم^{2}\,عہ}{س} + \frac{۲\,جب^{2}\,عہ}{ے}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

جو عہ = ۰ کے لیے نتیجہ (۲) دفعہ ۱۱۷ کی شکل اختیار کرلیتا ہے، $\frac{س}{ے} = \frac{۲}{۵}$ لیا جائے تو ترچھے پن کے اثر سے انصراف تنگ لپیٹے ہوئے مرغولے (عہ=۰) کے مقابلے میں جس کا یہی طول ل ہو ٹھوس مدور تراش کے تار کی صورت میں عہ = ۱۰° کے لیے ۱ فی صدی سے کم گھٹاؤ اور عہ = ۴۵° کے لیے تقریباً ۱۰ فی صدی گھٹاؤ ہوتا ہے۔ بعض دوسری تراشوں میں اس سے بہت زیادہ اثر ہوتا ہے۔ غیر مدور تراشوں کے لیے (۱) میں $\frac{ف ل}{س جا}$ کی بجائے طہ کی وہ قیمت استعمال کرنی چاہیے جو دفعہ ۱۱۲ میں دی ہوئی ہے۔

محور ہ مَا کے گرد جو خماؤ کا عمل ہے وہ اور ہ لاَ کے گرد کی مروڑ، یہ دونوں کمانی کے آزاد سرے کو مرغولے کے محور کے گرد گردش دیتے ہیں۔ اگر یہ گردش فہ مطلوب ہو تو اس کو اس طرح اخذ کرسکتے ہیں کہ ہ پر کے ایک چھوٹے طول فرل کی ہ لاَ اور ہ مَا کے گرد گردشوں کے اجزائے تحلیلی ہ لا اور ہ ما کے گرد حاصل کیے جائیں۔ اگر فہ کو اس صورت کے لیے مثبت لیا جائے کہ پیچوں کی تعداد بڑھے یعنی انحنا بڑھے تو ہ لاَ کے گرد مروڑ کی وجہ سے گردش

$$فرطہ = \frac{و م جم عہ}{س جا} \times فرل \quad ....(۴)$$

اور ہ ما کے گرد اس کا جزوِ تحلیلی مثبت ہے اور حسبِ ذیل ہے:-

$$\frac{و م \times فرل \times جم عہ}{س جا} \times جب عہ \quad ....(۵)$$

صفحہ ۳۲۱

ہ مَا کے گرد خماؤ منفی ہے (یعنی پیچوں کو کھولتا ہے) اور حسبِ ذیل ہے:-

$$فرفہ = - \frac{و م جب عہ}{آ ے} \times فرل \quad ....(۶)$$

اور ہ ما کے گرد اس کا جزو تحلیلی

= و سا × فرل × جب عہ / آ سے × جم عہ ....(۷)

ہے - اس طرح ہ ما کے گرد مجموعی گردش

فرفہ = و سا × فرل × جب عہ جم عہ (۱/س جا − ۱/آ سے) ....(۸)

اور تمام مساوی طولوں فرل کے لیے یہ گردش فرفہ مساوی ہوگی یعنی فرفہ/فرل = مستقل،

اور اس طرح

فہ = و سا ل جب عہ جم عہ (۱/س جا − ۱/آ سے) یا ۲ ۳ و سا ن جب عہ

(۱/س جا − ۱/آ سے) ....(۹)

جو کسی دیے ہوئے طول ل اور عمودی تراش کے لیے صریحاً اس وقت اعظم ہوگا جب کہ عہ = ۴۵°

اسی طرح اجزائے ترکیبی لینے سے ٹکڑے فرل سے ہ لا کے گرد جو گردش حاصل ہوگی اُس کی مدد سے مجموعی گردش طہ = صہ/سا حاصل ہوگی اور انصراف

صہ = سا طہ = و ل سا۲ (جم۲ عہ/س جا + جب۲ عہ/آ سے) جو (۲) کے مطابق ہے -

قطر ق کی ٹھوس مدور تراش کے لیے

فہ = ۳۲ و سا ل / ۳ ق۴ جب عہ جم عہ (۱/س − ۲/سے) یا ۶۴ و سا ن / ق۴ جب عہ

(۱/س − ۲/سے) نیم قطری ....(۱۰)

جو $\frac{س}{ے} = \frac{۲}{۵}$ کے لیے صریحاً مثبت ہے۔

غیر مدور تراشوں کے لیے اوپر کے جملوں میں $\frac{۱}{جا}$ کی بجائے $\frac{ت ل}{س}$ کے وہ عددی سر استعمال کرنے چاہییں جو دفعہ ۱۱۲ کی مساواتوں (۲)، (۴)، اور (۶) میں دیے گئے ہیں۔ ایسی تراشوں میں، جیسے کہ ناقص اور مستطیل ہیں جن کے خاص عمودی ابعاد بہت نامساوی ہوں، مروڑ اور خمیدگی کی صلابتوں میں بہت فرق ہو سکتا ہے لیکن مدور تراشش میں اگر $\frac{س}{ے} = \frac{۲}{۵}$ لیا جائے تو

$$\frac{س\, جا}{آ\, ے} = \frac{۴}{۵}$$

ایسی پچکی ہوئی تراشوں میں گردش فہ مدور تراش سے بہت زیادہ ہو سکتی ہے اور مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

صفحہ ۳۲۲

اعظم خاص زور کی حدت مساوات (۳) دفعہ ۱۱۳ سے معلوم ہو سکتی ہے۔ زور کا جزوِ ترکیبی ز ایک خماؤ کے معیار و ہ جب عہ سے اور جزوِ ترکیبی زج ایک مروڑ کے معیار و ہ جم عہ سے پیدا ہوتا ہے۔ (غیر مدور تراشوں کے لیے زج دفعہ ۱۱۲ کے مطابق محسوب ہوگا)۔ مدور تراشوں کے لیے خاص زور مساوات (۴) دفعہ ۱۱۳ کی رُو سے حسبِ ذیل ہو جاتا ہے:۔

$$ز = \frac{۱۶}{\pi\, ق^۳}\, و ہ\, (۱ + جب\, عہ) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

جزی زور کی اعظم حدت حسبِ ذیل ہے:

$$\frac{۱۶}{\pi\, ق^۳}\sqrt{و^۲ ہ^۲ جم^۲ عہ + و^۲ ہ^۲ جب^۲ عہ} = \frac{۱۶\, و ہ}{\pi\, ق^۳}$$

جو بالکل تنگ لپیٹے دار کمانی کی طرح ہے۔

(۲) محوری پیچیدگی مر - ہ ما کے گرد جو معیار ہے (جس کو مثبت سمجھا جائیگا اگر وہ فہ کو بڑھائے یعنی لچھوں کے انحنا کو بڑھائے) اس کو حسب سابق دو اجزا میں تحلیل کیا جاسکتا ہے ایک ہ مَا کے گرد مر جم عہ اور ایک ک کا کے گرد مر جب عہ اور اس طرح بازگشتگی کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$\frac{1}{2}\ \text{مر فہ} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ل مر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ل مر}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ}}{\text{س جا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\text{فہ} = \text{ل مر}\left(\frac{\text{جم}^2\text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{س جا}}\right) = 32\ \text{ر ان مر قطعہ}$$

$$\left(\frac{\text{جم}^2\text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{س جا}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

اس میں غیر مدور تراشوں کے لیے جا میں حسب سابق دفعہ ۱۲ا کے مطابق ترمیم کرنی ہوگی - نطرق کے مدور تار کے لیے

$$\text{فہ} = \frac{32\ \text{ل مر}}{\pi\ \text{ق}^4}\left(\frac{2\ \text{جم}^2\text{عہ}}{\text{ے}} + \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{س}}\right) = \frac{64\ \text{مر ر}^2}{\text{ق}^4}\ \text{ن قطعہ}$$

$$\left(\frac{2\ \text{جم}^2\text{عہ}}{\text{ے}} + \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{س}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

جو عہ = ۰ کے لیے نتیجہ (۸) دفعہ ۱۱۷ کی شکل اختیار کرلیتا ہے -

$\frac{\text{س}}{\text{ے}} = \frac{2}{5}$ لیا جائے تو تار کے ایک ہی طول کے لیے فہ کی قیمت عہ = ۰ کے مقابلے میں عہ = ۱۰° کے لیے ۱ فی صدی زیادہ اور عہ = ۴۵° کے لیے $\frac{1}{2}$ ۱۲ فی صدی زیادہ ہوتی ہے -

جفت مر سے پیدا ہونے والا محوری تطول گردشوں کو حسب سابق تحلیل کرنے سے حاصل ہوگا - مدور تراشوں کے لیے نتیجہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{صہ} = \text{مر ل ر جب عہ جم عہ}\left(\frac{1}{\text{س جا}} - \frac{1}{\text{آ ے}}\right) \quad \ldots\ldots (15)$$

اس طرح تطرق کے ٹھوس مدور تار کے لیے

$$ص = \frac{۳۲ ل ھ م^۲}{۳ ق ^۴} جب عہ جم عہ \left(\frac{۱}{س} - \frac{۲}{ے}\right) یا \frac{۶۴ ھ م^۲}{ق^۴} ن جب عہ$$

$$\left(\frac{۱}{س} - \frac{۲}{ے}\right) \quad ....(۱۶)$$

مساوات (۱۵) میں غیر مدور تراشوں کے لیے ترمیم حسب سابق ہوگی۔

دفعہ ہذا میں جو مختلف ضابطے حاصل کیے گئے ہیں ان کو صرف تقریبات سمجھا جائے کیونکہ م اور عہ کو مستقل سمجھا گیا ہے۔ در اصل یہ متغیر ہوتے ہیں اور محوری طول کی تبدیلی سے اور مروڑ سے بدلتے ہیں جیسا کہ صریحی ربط

پیچ کا محوری طول = ل جب عہ

اور ۲ π ن م = ل جم عہ

سے ظاہر ہے۔

انصراف صہ محوری طول کی تبدیلی ہے اور مروڑ قہ، ۲ π ن کی تبدیلی ہے۔ خفیف انصرافوں اور مروڑوں کے لیے عہ اور م کی تبدیلیوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے، اور دیے ہوئے ضابطے تقریباً ٹھیک ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک تنگ پیچ دار مرغولی کمانی ½ انچ کے گول فولادی تار کی بنی ہوئی ہے اور اس کے ۱۰ لپیٹے ہیں جن کا اوسط قطر ۱۰ انچ ہے۔ اگر کمانی ۲۰۰ پونڈ کا محوری بوجھ اٹھائے تو تطول، مروڑ کے زور کی حدت، اور بازگشتگی فی مکعب انچ معلوم کرو۔ س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ۔

تار کے محور کے گرد مروڑ کا معیار

۲۰۰ × ۵ = ۱۰۰۰ پونڈ انچ

اس طرح مروڑ کا زاویہ

= ۱۰ × ۲۲ ۱۰ × ۲۰۰ / (۲۲/۳۲ × ۱/۱۶ × ۶۱۰ × ۱۲) = ۶۴/۷۵ نیم قطری

اور انصراف

= ۵ × ۶۴/۷۵ = ۴/۱۵ ۴ انچ

جزی زور کی حدت

ز ج = ۸ × ۱۶ × ۲۰۰ / ۲۲ = ۸۱۵۰ پونڈ فی مربع انچ

بازگشتگی فی مکعب انچ

= ۱/۴ × ز ج^۲ / س = ۱/۴ × ۸۱۵۰ × ۸۱۵۰ / (۶۱۰ × ۱۲) = ۱،۳۸ انچ پونڈ

مثال ۲ — اگر مثال اکی کمانی پر ۱۲۵ پونڈ انچ کی ایک محوری پیچیدگی لگائی جائے تو محوری مروڑ، کھاؤ کے زور کی حدت، اور جمع شدہ کام فی مکعب انچ معلوم کرو۔
س = ۳۰ × ۶۱۰ پونڈ فی مربع انچ

مروڑ کا زاویہ

ذ = ح ل / (ٹ س) = ۱۶ × ۶۴ × ۱۰ × ۲۲ ۱۰ × ۱۲۵ / (۲۲ × ۶۱۰ × ۳۰) = ۷۳/۱۵۰ نیم قطری

= ۲۴،۳۵ درجے

کھاؤ کے زور کی حدت

ز = ۳۲ ح / (ق ۳ ط) = ۸ × ۱۲۵ × ۳۲ / ۲۲ = ۱۰،۱۸۰ پونڈ فی مربع انچ

اور بازگشتگی فی مکعب انچ

= ۱/۸ ز^۲ / س = ۶۱۰ × ۲(۱۰،۱۸) / (۶۱۰ × ۳۰ × ۸) = ۰،۴۳۲ انچ پونڈ

مثال ۳۔ ایک مرغولہ دار کمانی میں دس لچھے ہیں جن کا قطر ۱۰ انچ ہے اور جو $\frac{۱}{۲}$ انچ کے گول فولادی تار کے بنے ہیں۔ اگر مرغولہ محور سے ۶۰° کا زاویہ بنائے (یعنی ھ = ۳۰°) تو ۴۰ پونڈ کے محوری بوجھ کے تحت محوری انصراف اور آزاد سرے کا مروڑ معلوم کرو۔ نیز فولاد کے اندر زور کی اعظم حدت کا تخمینہ کرو۔

مثال ا کی سادہ تر صورت کے نتائج اور دفعہ ۱۱۸ کی مساوات (۳) کے استعمال سے

$$\text{حد} = \frac{۱۶}{۱۵}\, ۴ \times \text{قط}\, ۳۰° \left(\text{جم}^۲\, ۳۰° + \frac{۲}{۲٫۵}\,\text{جب}^۲\, ۳۰°\right)$$

$$= \frac{۶۴}{۱۵} \times ۱٫۱۵۵\, (٫۷۵ + ٫۲) = ۴٫۶۸ \text{ انچ}$$

(دیکھو تار کا طول مثال ا سے ۱۵٫۵ فی صدی زیادہ ہے)۔ اور مساوات (۱۰) دفعہ ۱۱۸ سے

$$\text{فہ} = \frac{۱۶ \times ۱۰ \times ۲۵ \times ۴۰ \times ۱۲۸}{۱۰^۶ \times ۱۲} \times \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۲}{۲٫۵}\right)$$

$$= \frac{۶۴}{۳۷۵} \text{ نیم قطری} = ۹٫۸ \text{ درجے}$$

مساوات (۱۱) دفعہ ۱۱۸ سے اعظم خاص زور کی حدت

$$= \frac{۵ \times ۳۲۰ \times ۱۶}{\pi}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right) = ۸۱۶۰ \times ۱٫۵ = ۱۲۲۴۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

مثال ۴۔ ایک مرغولی کمانی ایک چپٹی فولادی پٹی کی بنی ہوئی ہے جو ا انچ چوڑی اور $\frac{۱}{۱۰}$ انچ موٹی ہے اور موٹائی مرغولے کے محور کے علی القوائم ہے۔ لچھے پانچ ہیں جن کا اوسط قطر ۴ انچ ہے اور گھائی ۱۰ انچ ہے۔ اگر بالائی سرا مضبوطی کے ساتھ ثابت ہو تو نچلے سرے کی گردشش فی پونڈ محوری بوجھ کا تقریبی اندازہ لگاؤ۔ س اور ے کی وہ قیمتیں لو جو مثال ۱ اور ۲ میں دی گئی ہیں۔

اگر انتصابی محور کی صورت میں لچھے اُفق سے زاویہ ھ بنائیں تو

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{گھائی}}{\text{اوسط محیط}} = \frac{۱۰}{۳۲} = ۰٫۲۹۷$$

اس لیے $\quad \text{جب عہ} = ۰٫۲۲۳$

اب مساوات (۹) دفعہ ۱۱۸ میں $\frac{۱}{\text{جا}}$ کی بجائے نتیجہ (۲) دفعہ ۱۱۲

یعنی $\frac{۴۰ \text{جا}}{\text{ر}^۲}$ کو استعمال کرنا چاہیے اور ایک مستطیل ض × ق کے لیے

$$\text{جا} = \frac{۱}{۱۲} \text{ض ق} (\text{ض}^۲ \times \text{ق}^۲)\text{، اس لیے}$$

$$\text{جا} = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۰} (۱٫۰۱) = \frac{۱٫۰۱}{۱۲۰}$$

اور

$$\text{ر} = \frac{۱}{۱۰}.$$

$$\frac{۴۰ \text{جا}}{\text{ر}^۲} = \frac{۱۰۰۰۰ \times ۱٫۰۱ \times ۴۰}{۱۲۰} = \frac{۱۰۱۰۰}{۳}$$

نیز $\quad \text{ا}^۳ = \frac{۱}{۱۲} \text{ض ق}^۳ = \frac{۱}{۱۲۰۰۰}$

اس لیے مساوات (۹) دفعہ ۱۱۸ سے ایک پونڈ محوری بوجھ کے لیے مروڑ کا زاویہ

$$\text{فہ} = \frac{۰٫۶۲۳ \times ۵ \times ۴ \times ۳۲}{۱۰^۶} \left(\frac{۱۲۰۰۰}{۳۰} - \frac{۱۰۱۰۰}{۱۲ \times ۳} \right)$$

$$= \frac{۰٫۶۲۳ \times ۵ \times ۴ \times ۳۲}{۱۰^۶ \times ۱۲} (۴۸۰۰ - ۳۳۶۷)$$

$$= -۰٫۰۰۹۳۵ \text{ نیم قطری} = -۰٫۵۳۵ \text{ درجے}$$

منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کمانی کھلتی ہے۔

مثال ۵ — مدور فولاد کی ایک تنگ لچھے دار مرغولی کمانی کا وزن معلوم کرو جو ۵۰۰ پونڈ کے بے خطر بوجھ کو ۲ انچ کے تطول اور جزی زور کی بے خطر حدت

۵۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے ساتھ برداشت کرنے کے لیے ضروری ہو۔ س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ اور فولاد کا وزن ۲۸ء پونڈ فی کعب انچ ہے۔

برداشتی بازگشتگی فی کعب انچ

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{ن^2}{س} = \frac{2500 \times 10^6}{4 \times 12 \times 10^6} = 52.1 \text{ انچ پونڈ}$$

$$\text{جمع شدہ کام} = \frac{1}{2} \times 500 \times 2 = 500 \text{ انچ پونڈ}$$

$$\text{مطلوبہ حجم} = \frac{500}{52.1} \text{ کعب انچ}$$

$$\text{کمانی کا مطلوبہ وزن} = \frac{.28 \times 500}{52.1} = 2.69 \text{ پونڈ}$$

سوالات نمبر ۱۰

۱۔ ایک فولادی دھرے کا قطر ۳ انچ ہے، اور اس میں مروڑ ۵ فٹ طول میں ۱° سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ اگر س = ۵۲۰۰ ٹن فی مربع انچ تو یہ مروڑ کے زور کی کس اعظم حدت کے تناظر ہوگا؟

۲۔ وہ مروڑ کا معیار معلوم کرو جو ایک ۳ انچ قطر کے دھرے میں ۹۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا زور پیدا کریگا۔ اگر س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ تو ۱۰ فٹ طول میں مروڑ کا زاویہ کیا ہوگا؟

۳۔ ۱۰۰ ا۔ط کو ۹۰ چکر فی منٹ پر منتقل کرنے کے لیے دھرے کا کتنا قطر درکار ہوگا اگر اعظم پیچیدگی اوسط سے ۳۰ فی صدی زیادہ ہو اور مروڑ کے زور کی حد ۸۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو۔ اگر س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ تو ۱۰ فٹ طول میں مروڑ کا اعظم زاویہ کیا ہوگا؟

۴۔ اگر ایک ۳ انچ قطر کا دھرا ۱۰۰ ا۔ط کو ۱۵۰ چکر فی منٹ پر منتقل کرے اور مروڑ کا اعظم معیار اوسط سے ۱½ گنا ہو تو مروڑ کے زور کی اعظم حدت

معلوم کرو۔

۵۔ ایک داسر کے دُھرے میں اعظم زور معلوم کرو جس کا بیرونی قطر ۱۶ انچ اور اندرونی قطر ۸ انچ ہے اور جس پر صرف ایک مروڑ کا معیار ۱۸۰۰ ٹن انچ عمل کرتا ہے۔ اگر س = ۵۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ تو قطر کے ۲۰ گنے طول میں مروڑ کتنا ہوگا۔

۶۔ سوال ۵ کے دُھرے کا مقابلہ ایک ٹھوس گول دُھرے سے جس کا طول اور وزن وہی ہو (۱) بلحاظ مروڑ کی لچکدار مضبوطی کے (۲) بلحاظ صلابت یا مروڑ کی استواری کے کرو۔

۷۔ سوال ۵ کے دُھرے کا مقابلہ ایک ٹھوس گول دُھرے سے جس کی مروڑ کی اُستواری وہی ہو (۱) بلحاظ وزن کے (۲) بلحاظ مضبوطی یا مروڑ کی مزاحمت کے معیار کے کرو۔

۸۔ ایک ۴ انچ قطر کے دُھرے کی ایک خاص تراشش پر ۴۰۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک مروڑ کا معیار اور ۳۰۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک خماؤ کا معیار عمل کرتے ہیں۔ مادے میں راست زور کی اعظم حدت کیا ہوگی اور اعظم خاص زور کا دُھرے کے محور کے ساتھ میلان کیا ہوگا۔

۹۔ ایک ٹھوس دُھرے کا قطر کیا ہونا چاہیے کہ ۱۶۰ ٹن فٹ کے ایک مروڑ کے معیار اور ۴۰ ٹن فٹ کے ایک خماؤ کے معیار کو برداشت کرے اور اعظم راست زور ۴ ٹن فی مربع انچ تک محدود رہے۔ اس مطلب کے لیے ایک کھوکھلا دُھرا استعمال کیا جائے جس کا اندرونی قطر بیرونی قطر کا ۶/۱ ہو تو اس کا بیرونی قطر کیا ہونا چاہیے۔

صفحہ ۲۲۶

۱۰۔ ایک ½۲ انچ قطر کے دُھرے پر ۶ ٹن انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ اگر اس کو ۱۰۰ چکر فی منٹ پر چلایا جائے تو یہ کتنی اسپی طاقت منتقل کر سکتا ہے بغیر اس کے کہ اعظم راست زور ۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔

۱۱۔ ایک داسر کا ٹھوس تراش کا دُھرا ۱۰ انچ قطر کا ہے اور ۱۲۰۰ ا۔ ط کو ۹۰ چکر فی منٹ پر منتقل کرتا ہے۔ اگر پیچ کا دھکیل ۱۰ ٹن ہو تو دُھرے میں فشاری زور کی اعظم حدت محسوب کرو۔ خماؤ کے زور قابل نظر اندازی ہیں۔

۱۲۔ اگر گزشتہ سوال میں ۱۰ ٹن فٹ کا ایک خماؤ کا معیار بھی موجود ہو تو

فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۱۳ - فولاد کی ۱ انچ قطر کی ایک گول سلاخ جو ۵۰ انچ فصل کے دو نقطوں پر سہاری گئی ہے ۶۰۰ پونڈ کے ایک وسطی بوجھ کے تحت ۰٫۱۰۶ انچ منصرف ہوتی ہو اور ۱۰۰۰ پونڈ انچ کے مروڑ کے معیار سے ۴۰ انچ کے طول میں ۲٫۹۶ درجے مروڑی جاتی ہو تو اس کے لیے س اور پوائی سن کی نسبت معلوم کرو۔

۱۴ - ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی $\frac{۱}{۴}$ انچ کے گول فولادی تار کی بنی ہوئی ہے جس کے ۱۰ پیچے ۴ انچ اوسط قطر کے ہیں - ۱۲ پونڈ کے محوری بوجھ کے تحت اس کا انصراف معلوم کرو - (س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ) - تار میں جزی زور کی اعظم حدت کیا ہوگی اور کمانی کی صلابت پونڈ فی فٹ انصراف میں کیا ہے -

۱۵ - ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی کو $\frac{۱}{۴}$ انچ کے تار سے بنانا ہے (س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ) اور اس کو $\frac{۱}{۲}$ انچ فی پونڈ بوجھ منصرف ہونا ہے - اگر پیچوں کا قطر ۳ انچ ہو تو تار کا کتنا طول درکار ہوگا -

۱۶ - ایک تنگ پیچے دار کمانی $\frac{۱}{۴}$ انچ مربع فولاد کی بنی ہے اور اس میں دس مکمل پیچے ۲ انچ اوسط قطر کے ہیں - اعظم بے خطر بوجھ اور انصراف معلوم کرو - (س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ - اعظم بے خطر جزی زور ۵۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ) -

۱۷ - گول فولادی تار کی ایک تنگ لپیٹی ہوئی مرغولی کمانی کا ضروری وزن معلوم کرو جو ۳ ٹن کے بے خطر بوجھ کو برداشت کرے اور ۱ انچ کا انصراف ہو - (س = ۵۲۰۰ ٹن فی مربع انچ - اعظم بے خطر زور ۲۵ ٹن فی مربع انچ - فولاد کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ) -

۱۸ - اگر گزشتہ سوال میں پیچوں کا اوسط قطر ۵ انچ ہو تو ان کے گول تار کا طول اور قطر معلوم کرو -

۱۹ - سوال ۱۴ کی کمانی کو مرغولے کے محور کے گرد ۳۰° مروڑنے کے لیے کتنا مروڑ کا معیار درکار ہوگا - (سے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ) -

۲۰ - ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی کو مربع تراش کے فولاد سے بنانا ہے اور اس کو اس کے محور کے گرد ۵۰۰ پونڈ انچ کا انتہائی جفت برداشت کرنا

اور اس کے تحت ۴۰° میں مروڑا جاتا ہے۔ کمانی کو بنانے کے لیے تار کے ضروری طول اور موٹائی کا تخمینہ کرو۔ (ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ - حماؤ کا ۶۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو)۔

۲۱ — ۴ انچ قطر کے ۱۰ مکمل لچھوں کی فولادی کمانیاں حسب ذیل تراشوں کی بنائی گئی ہیں:۔ (۱) $\frac{۱}{۴}$ انچ قطر کی گول تراش (۲) ناقصی تراش $\frac{۱}{۲}$ انچ × $\frac{۱}{۴}$ انچ، چھوٹا قطر لچھے کے محور سے نیم قطری سمت میں (۳) $\frac{۱}{۴}$ انچ مربع (۴) مستطیلی تراش $\frac{۱}{۲}$ انچ چوڑی اور $\frac{۱}{۸}$ انچ موٹی، موٹائی لچھے کے محور سے نیم قطری سمت میں۔ لچھے ہر صورت میں محور کے علی القوائم مستوی سے ۳۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔ ہر صورت کے لیے ۱۲ پونڈ کے محوری بوجھ سے کھنچاؤ معلوم کرو۔ (س = ۱۲ × ۱۰^۶ اور ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ)۔

۲۲ — گزشتہ سوال میں کمانیوں کے آزاد سروں کی گردش معلوم کرو۔

۲۳ — سوال نمبر ۲۱ کی کمانیوں میں ۱۵ پونڈ انچ کی محوری پیچیدگی کے تحت مروڑ معلوم کرو۔

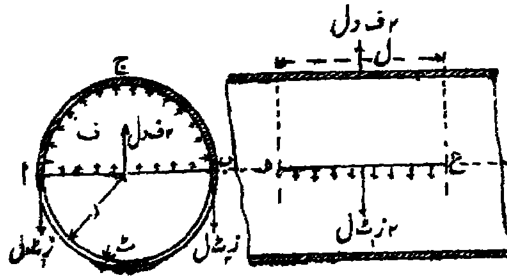
صفحہ ۳۴۷

گیارھواں باب

نل، اُستوانے اور قُرص

۱۱۹ـ پتلے اُستوانی خول میں اندرونی دباؤ ـ حلقہ تناؤ۔

اگر ایک بہت پتلی دیوار کے مدور اُستوانے یا نل میں ایک سیال دباؤ کے تحت ہو تو سیال کے وزن کو نظرانداز کرتے ہوئے اِس اُستوانے یا نل میں دیواروں پر یکساں عمادی دباؤ ہوگا اور اس کی وجہ سے دیوار کے مادے میں ایک تنشی زور عرضی تراش کے محیط کی مماسی سمتوں میں پیدا ہوگا۔ اس کو بالعموم محیطی تناؤ یا حلقہ تناؤ کہتے ہیں۔ حلقہ تناؤ کی حدت در اصل دیوار کی اندرونی جانب بیرونی جانب سے زیادہ ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۲)، لیکن اگر دیوار کی موٹائی خول کے قطر کے مقابلے میں خفیف ہو تو تناؤ کا تغیر قابلِ نظراندازی ہوگا اور زور کو یکساں منقسم سمجھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک پتلے بے جوڑ (یعنی جس میں جوڑ نہ ہوں) مُدور اُستوانے کا اندرونی نصف قطر ر (شکل ۱۵۶) اور نیم قطری موٹائی ٹ ہے اور اس پر ایک اندرونی دباؤ حدت ف کا ہے جس کی وجہ سے حلقہ تناؤ حدت زؔ کا پیدا ہوتا ہے۔ ایک نصف اُستوانہ اب ج کے تعادل پر غور کرو جس کا طول ذ ع یا ل ہے۔ چونکہ محور کے علی القوائم



شکل ۱۵۶

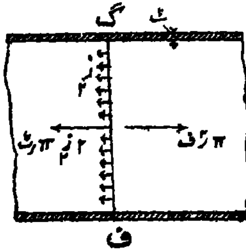
مستویوں میں دیواروں پر کوئی جزی زور نہیں اس لیے قطری مستوی اب کے علی القوائم مجموعی حلقہ تناؤ ز۱ × ٹ × ل اُستوانے کے دونوں پہلوؤں میں ہونگے جیسا کہ ا اور ب پر دکھایا گیا ہے۔ یہ منحنی سطح اج ب پر کے حاصل سیالی دباؤ کو عین تعادل میں رکھینگے۔ یہ حاصل دباؤ وہی ہوگا جو قطری مستوی اب پر ہے یعنی ف × ۲ رل۔ اس لیے

۲ ز۱ × ل × ٹ = ۲ ف × ر × ل .... (۱)

اور

ز۱ = ف ر / ٹ .... (۲)

طولی تناؤ — اُستوانی خول کے سروں کو محور کے متوازی کسی طرح کے تھاموں کے ذریعے جوڑا جاسکتا ہے جو اندرونی سیالی دباؤ کے اس اقتضا کی کہ سروں کو علیحدہ کردے کُلاً یا جزءاً مزاحمت کرتے ہیں اور اس طرح خول کے مادّے کے اندر طولی زور کو روک دیتے ہیں یا کم کردیتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں یہ ہوسکتا ہے کہ سرے خول کے ساتھ ہی جوڑ دیے جائیں۔ ایسی صورت میں خول میں حلقہ تناؤ ز۱ کے علاوہ ایک طولی تناؤ بھی ہوگا جس کی حدت فرض کرو کہ ز۲ ہوگی۔ اگر اُستوانے کے ایسے طول پر غور کیا جائے جس کے ایک سرے پر بند سرا ہو اور دوسرے سرے پر ایک عمادی



شکل ۱۵۷

تراشی مستوی ف گ (شکل ۱۵۱ ا) ہو تو اس حصے پر محوری سمت میں قوتیں دو ہیں ایک تو سیالی دباؤ کا محوری دھکیل جو سرے کی شکل پر منحصر نہیں اور ف × π ر² کے مساوی ہے اور دوسرے مجموعی طولی تناؤ $\text{ز}_{۲} \times ۲ \pi \text{ رٹ}$ ۔ اس لیے

$$\text{ز}_{۲} \times ۲\pi \text{ رٹ} = \text{ف} \times \pi \text{ ر}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ز}_{۲} = \frac{\text{ف ر}}{۲\text{ٹ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یہ حدت محیطی یا حلقہ تناؤ کی حدت کی ٹھیک ٹھیک نصف ہے یعنی

$$\text{ز}_{۲} = \frac{۱}{۲}\text{ز}_{۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

ان دو خاص زوروں ز۱ اور ز۲ کے علاوہ ایک تیسرا خاص زور نیم قطری دباؤ بھی ہے جو اندرونی پہلو پر ف ہے اور بیرونی جانب صفر ہے ۔ پتلے خولوں میں اس زور کو ز۱ اور ز۲ کے مقابلے میں عموماً نظر انداز کیا جاسکتا ہے ۔ محیطی فساد س۱ دفعہ ۱۹ کی رو سے صریحاً حسبِ ذیل ہوگا :۔

$$\text{س}_{۱} = \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}} - \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{م ے}} = \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}}\left(۱ - \frac{۱}{۲\text{م}}\right) \text{ یا } \frac{\text{ف ر}}{\text{ٹ ے}}\left(۱ - \frac{۱}{۲\text{م}}\right)$$

جہاں $\frac{۱}{\text{م}}$ پوائی سن کی نسبت ہے اور ے راست یا کھنچاؤ کی لچک کا مقیاس ہے ۔ اور

$$\text{ے س}_{۱} = \text{ز}_{۱}\left(۱ - \frac{۱}{۲\text{م}}\right) \text{ یا } \frac{\text{ف ر}}{\text{ٹ}}\left(۱ - \frac{۱}{۲\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

جو م = ۴ کے لیے $\frac{۷}{۸}$ ز۱ ہو جاتا ہے ۔

طولی فساد س۲ حسبِ ذیل ہوگا :۔

$$\text{س}_{۲} = \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{ے}} - \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{م ے}} = \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{ے}}\left(۱ - \frac{۲}{\text{م}}\right) \text{ یا } \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\text{م}}\right) \text{ یا } \frac{\text{ف ر}}{۲\text{ٹ ے}}\left(۱ - \frac{۲}{\text{م}}\right)$$

$$ے\,س_۲ = ز_۲\left(۱-\frac{۲}{م}\right) \quad ....\,(۷)$$

جو م = ۴ کے لیے $\frac{۱}{۲}$ ز۲ ہوجاتا ہے ۔ لچکدار مضبوطی کا جو "اعظم فساد" کا نظریہ ہے (دیکھو دفعہ ۲۵) اس کی رُو سے ظاہر ہے کہ طولی زور سے خول کی محیطی سمت کی مضبوطی میں اضافہ ہوتا ہے۔

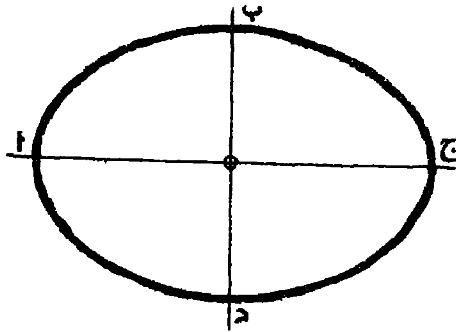
نصف قطر کا اضافہ محیط ہی کے اضافے کے تناسب (س۲) میں ہوگا اور گنجائش یعنی خول سے گھرے ہوئے حجم کا کسری اضافہ

$$= ۲س_۲ + س_۲ \text{ یا } \frac{ف\,ر}{ے\,ط}\left(\frac{۵}{۲} - \frac{۲}{م}\right) \quad ....\,(۸)$$

لچکدار مضبوطی کے "اعظم جزی زور" یا "زور کے اعظم فرق" کے نظریے کی رُو سے اعظم اثر اس کے معادل ہوگا جو ایک سادہ تناؤ ز۲ - (- ف) = ز۲ + ف سے پیدا ہو اور (۲) سے

$$ز_۲ + ف = ف\left(\frac{ر}{ط} + ۱\right) \quad ....\,(۹)$$

بیضوی اُستوانے ــــ کسی بیضوی تراش کے، مثلاً ناقصی اُستوانے میں حلقہ تناؤ کی حدت محیط پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے۔ اِس کے علاوہ بیضوی تراش میں مدور بن جانے کا اقتضا ہوتا ہے اور وہ اس وجہ سے کہ ایک خماؤ کا معیار اقل انحنا کے نقاط (مثلاً ب اور د شکل ۱۵۸) کے نواح میں انحنا کو بڑھانا



شکل ۱۵۸

چاہتا ہے اور اعظم انحنا کے نقاط مثلاً ا اور ج کے نواح میں ایک مخالف علامت کا

خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ ا اور ج پر حلقہ تناؤ بالکل (۱) اور (۲) کی طرح $\frac{ف \times و ا}{ٹ}$ اور اسی طرح ب اور د پر $\frac{ف \times و ب}{ٹ}$ ہوگا اور (۳) اور (۴) کی طرح طولی تناؤ

$$ن_م = \frac{ف \times (\text{نل کا اندرونی رقبہ})}{ٹ \times (\text{نل کا محیط})}$$

خماؤ کے معیار ا، ب، ج اور د پر انتہائی قیمتوں کو پہنچتے ہیں اور ان چار نقاط پر متبادلاً مخالف علامت کے ہوتے ہیں اور ہر دو متصل نقاط کے درمیان صفر قیمت سے گزرتے ہیں۔ اس طرح کے نل یا استوانے کے محیط کے مختلف نقاط پر خماؤ کا معیار اور جزی قوت اور تناو معلوم کرنے کا ایک آسان ترسیمی قاعدہ مسٹر ولیسٹن نے رسالہ انجینیر (۲۲ ستمبر ۱۹۰۲ء) میں دیا ہے۔

۱۲۰۔ پتلے خولوں کے جوڑ — اُستوانی خول اکثر جوڑ دار ہوتے ہیں (مثلاً بڑے قطر کے نل اور بھاپ جوشارے) اور ایسی تختیوں پر مشتمل ہوتے ہیں جو صحیح نصف قطر پر مڑی ہوئی اور ریوٹ دار جوڑوں سے جُڑی ہوئی ہوتی ہیں۔ ریوٹ دار جوڑ کی مضبوطی بہت صحت کے ساتھ محسوب نہیں ہو سکتی کیونکہ زور کی تقسیم بہت پیچیدہ ہوتی ہے۔ ریوٹوں اور تختیوں میں زور محسوب کرتے وقت عموماً اوسط زور مراد ہوتا ہے۔ ریوٹوں کے تناسبات اور اُن کی گھائی ہمیشہ صرف مضبوطی کے نقطۂ نظر سے نہیں مقرر کیے جاتے۔ ایسے جوڑوں کی مناسب ترتیب جو تجربے سے حاصل شدہ قواعد پر مبنی ہو تعمیروں اور مشینوں کی تجویز کے مضمون سے متعلق ہے۔ ریوٹ دار جوڑ میں رگڑ کی وجہ سے کوئی مزاحمت ہو تو اس کو نظر انداز کرتے ہوئے اُس تختی کی جس میں ریوٹوں کے لیے سوراخ کیے گئے ہوں اقل تراش پر اوسط تنشی زور ٹھوس تختی کے زور سے اُسی نسبت میں زیادہ ہوگا جس نسبت میں ٹھوس تختی کی تراش سوراخ دار تختی کی

اقل تراشش سے تناؤ کی سمت کے علی القوائم سمت میں زیادہ ہے۔

اگر ایک اُستوانی خول میں جو ایک اندرونی دباؤ کے تحت ہو محیطی اور طولی جوڑ ہوں تو صریحاً تناؤ کی سمت کے علی القوائم تراشی رقبے کو محیطی جوڑوں میں طولی جوڑوں کی بہ نسبت زیادہ گھٹانے کی اجازت دی جا سکتی ہے کیونکہ محیطی جوڑ طولی تناؤ کی مزاحمت کرتے ہیں اور طولی جوڑ محیطی تناؤ کی جس کی حدت (ٹھوس تختی میں) طولی تناؤ سے دُگنی ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے محیطی ریوٹ دار جوڑ طولی جوڑوں سے بہت کم استعداد کے رکھے جاتے ہیں۔ استعداد وہ نسبت ہے جو جوڑ کی مضبوطی کو بے جوڑ ٹھوس تختی کے مساوی عرض کی مضبوطی کے ساتھ ہو۔

مرغولی جوڑ — چونکہ ایک پتلے اُستوانی خول کا کم زور ترین حصہ طولی جوڑ ہوتا ہے اس لیے اندرونی دباؤ کے لحاظ سے اس کو اس طرح مضبوط کیا جا سکتا ہے کہ تمام طولی جوڑوں کو اُستوانے کے محور کے ساتھ مائل رکھا جائے۔ اگر اُستوانی سطح پر ایک مرغولے کا میلان عرضی تراش کے مستوی کے ساتھ طہ ہو، یا اُستوانے کے محور کے ساتھ ۹۰° - طہ ہو تو عمادی زور کی حدت مرغولے کے علی القوائم مساوات (۱) دفعہ ۱۵ کی رُو سے اور دفعہ ۱۲۰ کی ترمیم کے بموجب حسبِ ذیل ہوگی:-

ز۲ جم۲ طہ + ز۱ جب۲ طہ یا ز۱ (½ جم۲ طہ + جب۲ طہ)

اور حاصل زور کی حدت جو مرغولے پر ترچھی ہوگی مساوات (۳) دفعہ ۱۵ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگی

½ √(ز۱² جم۲ طہ + ز۲² جب۲ طہ)

۱۲۱۔ پتلا کروی خول اندرونی دباؤ کے ساتھ —

ایک قطری مستوی پر قوتیں وہی ہونگی جو اُستوانے میں اس کے

محور کے علی القوائم مستوی پر ہوتی ہیں، اور اگر کُرے کا نصف قطر ر ہو، اندرونی دباؤ کی حدت ف، خول کے اندر تناؤ کی حدت ز اور خول کی موٹائی ٹ ہو تو مساوات (۴) دفعہ ۱۱۹ کی طرح

$$ز \times ۲ \times \pi \, ر ٹ = ف \times \pi \, ر^۲$$

$$ز = \frac{ف \, ر}{۲ ٹ}$$

یہ زور کی حدت کُروی خول کے ہر مماس کی سمت میں ہوگی اور زور کا ناقص ایک دائرہ ہوگا۔ خول کے نیم قطری فشاری زور کو نظر انداز کریں تو صریحاً محیطی فساد

$$س = \frac{ز}{ے} \left(۱ - \frac{۱}{م}\right)$$

اور $ے س = ز \left(۱ - \frac{۱}{م}\right) = \frac{ف \, ر}{۲ ٹ} \left(۱ - \frac{۱}{م}\right)$

صفحہ ۱۳۳ نصف قطر کا کسری اضافہ س ہوگا اور گھرے ہوئے حجم کا ۳ س یا $\frac{۳}{۲} \frac{ف \, ر}{ے ٹ} \left(۱ - \frac{۱}{م}\right)$ ہوگا۔

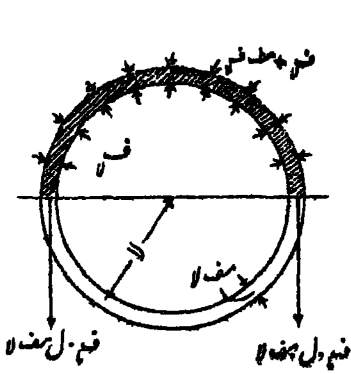
۱۲۴ - موٹا اُسطوانہ سیالی دباؤ کے زیر عمل —

ایک موٹا اُسطوانہ متجانس اور متساوی السموت شے کا بنا ہوا ہو تو اس کے اندر محیطی اور نیم قطری زور کی حدتیں چند سادہ مفروضوں کی مدد سے محسوب کی جا سکتی ہیں۔ ذیل کا نظریہ لامے[1] کا پیش کردہ ہے۔

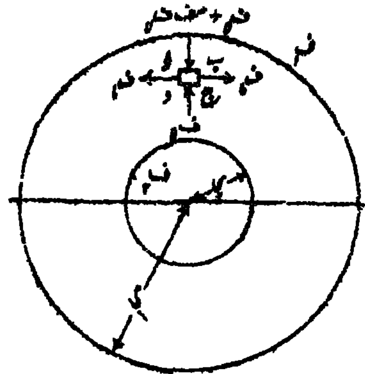
فرض کرو کہ اندرونی اور بیرونی قطر علی الترتیب $ر_۱$ اور $ر_۲$

[1] Lamé

ہیں (شکل ۱۵۹) ، اور اندرونی اور بیرونی دباؤں کی حدّیں ف۱ اور ف۲ ہیں۔ فرض کرو کہ کسی متغیر نصف قطر لا پر نیم قطری فشاری زور اور محیطی تناؤ کی حدّیں علی الترتیب فا اور فم ہیں۔ تیسرا خاص زور اُستوانے کے محور کے متوازی ہوگا۔ تب نصف قطر لا اور موٹائی مف لا اور کسی طول ل کے ایک بہت پتلے اُستوانی حصے کے نصف کے تعادل پر غور کریں (شکل ۱۶۰) تو مساوات (۱) دفعہ ۱۱۹ کی طرح منحنی سطح پر باہر کی



شکل ۱۶۰



شکل ۱۵۹

طرف دباؤ یعنی اندرونی اور بیرونی جانبوں کا باہر وار حاصل ایک قطری مستوی کے علی القوائم مجموعی حلقہ تناؤ کے مساوی ہونا چاہیے۔ یعنی

(فا × ۲ لا ل) − (فا + مف فا) ۲ (لا + مف لا) ل
= ۲ فم × ل × مف لا

یا − فا × مف لا − لا مف فا − مف لا مف فا = فم × مف لا

اور انتہا میں جب زیرِ غور حصّے کی موٹائی بے انتہا کم ہو

فم = − فا − لا (فرفا / فرلا) = − (فر / فرلا) (فا × لا) .... (۱)

$ف_{لا}$ اور $ف_{ا}$ کے درمیان ایک اور ربط ایک مفروضے پر مبنی ہے جو طولی فسادوں کے متعلق اختیار کیا گیا ہے۔ وہ مفروضہ یہ ہے کہ مستوی عرضی تراشیں دباؤ کے تحت مستوی رہتی ہیں۔ یہ مفروضہ سروں سے کافی فاصلے پر تقریباً صحیح ہونا چاہیے پھر خواہ سرے کسی طرح سے سہارے گئے ہوں بلکہ آزاد ہی کیوں نہ ہوں۔ اس مفروضے کی رُو سے کسی تراش کے اندر ہر نقطے پر طولی فساد مستقل ہونا چاہیے یعنی لا پر منحصر نہیں ہونا چاہیے۔ اب اگر طولی زور یکساں منقسم ہو اور اس کی حدت ز ہو (جو فرض کرو کہ تنشی ہے) اور محور سے فاصلہ لا پر کسی نقطے پر طولی فساد س ہو تو دفعہ ۱۹ سے

صفحہ ۲۳۲

$$س = \frac{1}{ے}\left(ز - \frac{ف_{ا} - ف_{لا}}{م}\right)$$

اگر تراشیں جو ابتداءً مستوی ہوں مستوی رہیں تو اس کو مستقل ہونا چاہیے۔ اور چونکہ س، ے، ز اور م مستقل ہیں اس لیے $ف_{ا} - ف_{لا}$ مستقل ہونا چاہیے۔ اس لیے فرض کرو کہ

$$ف_{ا} - ف_{لا} = ۲ا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) سے $ف_{ا}$ کی قیمت لے کر (۲) میں درج کرنے سے

$$-۲ف_{لا} - لا\frac{فرف_{لا}}{فرلا} = ۲ا$$

$$\frac{فرف_{لا}}{ف_{لا} + ا} = -\frac{۲\,فرلا}{لا}$$

تکمل کرنے سے $\quad لوک\,(ف_{لا} + ا) = -لوک\,لا^{۲} + مستقل$

یا

$$ف_{لا} + ا = \frac{ب}{لا^{۲}}$$

$$ف_{لا} = \frac{ب}{لا^2} - و \quad ....(۳)$$

جہاں و اور ب مستقل ہیں جن کو معلومہ اندرونی اور بیرونی نیم قطری دباؤ اور نصف قطر کے ذریعے معلوم کرنا ہوگا - نیز (۲) سے

$$ف_{ما} = \frac{ب}{لا^2} + و \quad ....(۴)$$

عددی سوالات کے حل کرنے کے لیے مساواتیں (۳) اور (۴) سہل ترین ضابطے ہیں - اب شکل ۱۵۹ کی مدد سے یہ شرائط درج کریں کہ $لا = س_ا$ پر $ف_{لا} = ف_ا$ اور $لا = س_۲$ پر $ف_{لا} = ف_۲$ تو

$$ب = \frac{س_ا^2 س_۲^2}{س_۲^2 - س_ا^2}(ف_۲ - ف_ا)$$

اور

$$و = \frac{ف_۲ س_۲^2 - ف_ا س_ا^2}{س_۲^2 - س_ا^2}$$

ان کو (۳) اور (۴) میں درج کرنے سے عام ترین جملے حاصل ہونگے -

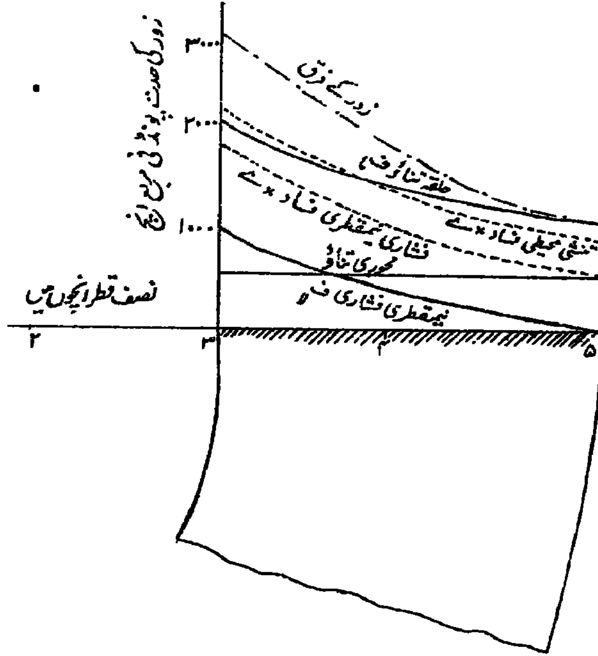
اندرونی دباؤ — اگر اندرونی دباؤ کی حدت $ف_ا$ ہو، اور بیرونی دباؤ $ف_۲$ صفر ہو جیسا کہ ماتوائی صدر نلوں اور اُستوانوں، وغیرہ، میں ہوتا ہے تو (۳) سے

$$ف_{لا} = \frac{س_ا^2 س_۲^2}{س_۲^2 - س_ا^2} \times \frac{ف_ا}{لا^2} - \frac{ف_ا س_ا^2}{س_۲^2 - س_ا^2}$$

$$= ف_ا \frac{س_ا^2}{س_۲^2 - س_ا^2}\left(\frac{س_۲^2}{لا^2} - ۱\right) \quad ....(۵)$$

$$ف_{ما} = ف_ا \frac{س_ا^2}{س_۲^2 - س_ا^2}\left(\frac{س_۲^2}{لا^2} + ۱\right) \quad ....(۶)$$

کسی دی ہوئی صورت میں نیم قطری فشاری زور ف۱ اور حلقہ تناؤ ف۲ کس طرح بدلتے ہیں یہ شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے (دیکھو ذیل کی مثال ۲)



شکل ۱۶۱ - موٹے اُستوانے میں زور اور فساد

جس میں نیم قطری اور حلقہ فساد یا محیطی فساد بھی دکھائے گئے ہیں جن کو 'اعظم فساد کے نظریے' (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ایک ناپ سمجھنا چاہیے۔ شکل ۱۶۱ میں فسادوں کے حساب میں یہ مانا گیا ہے کہ اُستوانے کی دیواریں اندرونی دباؤ کی وجہ سے سروں پر جو دھکیل ہے اُس کو ایک یکساں منقسم تنشی زور کے طور پر برداشت کرتی ہیں۔ صفحہ ۳۳۲

زور کی اعظم حدت اُستوانے کی اندرونی سطح کا حلقہ تناؤ ہے جہاں لا = م۱ اور یہ حدت حسبِ ذیل ہے :-

$$ف_{ما} = ف_{۲} \frac{ر_{۱}^{۲} + ر_{۲}^{۲}}{ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

خاص زوروں کا اعظم جبری فرق بھی شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ لچکدار مضبوطی کے "اعظم جزی زور" والے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رو سے "زور کے فرق" کی اعظم قیمت ہی سے لچکدار ناکارگی کا تعین ہوگا۔ اس جبری فرق کی قیمت (۵) اور (۶) سے حسب ذیل ہے :—

$$ف_{۱} + ف_{۲} = \frac{۲ ف_{۲} ر_{۱}^{۲} ر_{۲}^{۲}}{(ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲}) لا^{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۷ ا)$$

اور اس کی اعظم قیمت اندرونی سطح پر

$$ف_{ما} + ف_{۲} = \frac{۲ ف_{۲} ر_{۱}^{۲}}{(ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲})} \qquad \ldots\ldots\ldots (۷ ب)$$

صفحہ ۳۳۴

اگر طولی زور ز صفر ہو تو اعظم حلقہ زور کی سمت میں واقع ہونے والے اعظم فساد کا معادل زور حسب ذیل ہوگا :—

$$ے س_{ما} = ف_{۲} \left(\frac{ر_{۱}^{۲} + ر_{۲}^{۲}}{ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲}} + \frac{۱}{م} \right) \text{یا}$$

$$ف_{۲} \left\{ \frac{ر_{۱}^{۲} (م+۱) + ر_{۲}^{۲} (م-۱)}{م (ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲})} \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

جو قیمت (۷) سے زیادہ ہے اور جو م = ۴ کے لیے حسب ذیل شکل اختیار کرتا ہے :—

$$\frac{ف_{۲} \left(\frac{۵}{۴} ر_{۱}^{۲} + \frac{۳}{۴} ر_{۲}^{۲} \right)}{ر_{۱}^{۲} - ر_{۲}^{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

اگر اُستوانے کی دیواریں سروں کا دباؤ $\pi\,\text{ر}_2^2\,\text{ف}_2$ برداشت کریں تو ز_1 کو یکساں تناؤ ماننے سے $\text{ز}_1 = \text{ف}_2\,\text{ر}_2^2 \div (\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2)$ اور اس صورت میں اندرونی سطح پر دفعہ ۱۹ کی رُو سے

$$\text{ے}\,\text{س}_{\text{ر}_2} = \text{ف}_2 \left\{ \text{ر}_1^2(\text{م}+1) + \text{ر}_2^2(\text{م}-2) \right\} \div \text{م}\,(\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2) \quad \ldots (10)$$

جو (۸) سے کم ہے۔

بیرونی دباؤ۔— اگر بیرونی دباؤ ف_1 ہو اور اندرونی دباؤ ف_2 صفر ہو تو مستقلوں ا اور ب کی معلوم شدہ قیمتیں استعمال کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = -\frac{\text{ف}_1}{\text{لا}^2}\left(\frac{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}{\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2}\right) + \text{ف}_1\frac{\text{ر}_1^2}{\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2}$$

$$= \text{ف}_1\frac{\text{ر}_1^2}{\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2}\left(1 - \frac{\text{ر}_2^2}{\text{لا}^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\text{ف}_{\text{م}} = -\,\text{ف}_1\frac{\text{ر}_1^2}{\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2}\left(1 + \frac{\text{ر}_2^2}{\text{لا}^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

منفی علامت سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ محیطی زور $\text{ف}_{\text{م}}$ اس صورت میں فشاری ہے۔ اس کی اعظم قیمت $\text{لا} = \text{ر}_2$ پر ہوتی ہے اور حسبِ ذیل ہوتی ہے:—

$$\text{ف}_{\text{م}} = -2\,\text{ف}_1\,\text{ر}_1^2 \div (\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

زور کا فرق حسبِ ذیل ہے:—

$$\text{ف}_{\text{م}} + \text{ف}_{\text{لا}} = -2\,\text{ف}_1\,\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2 \div (\text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2)\,\text{لا}^2 \quad \ldots\ldots (14)$$

جس کی اعظم قیمت وہی ہے جو (۱۳) میں دی گئی ہے اور $\text{لا} = \text{ر}_2$ ہی پر ہوتی ہے۔

آیندہ استعمال کے لیے یہ معلوم رکھنا بھی مفید ہوگا کہ بیرونی دباؤ کی

صورت میں ہر جگہ

$$ف_{ما} = - ف_{لا} (لا^۲ + ما^۲) \div (لا^۲ - ما^۲)$$

۱۲۲ الف - نلوں اور اُستوانوں کے ابعاد — تجرباتی نتائج —

اندرونی دباؤ کے زیر عمل پتلی اور موٹی دیواروں کے نلوں کی لچکدار مضبوطیاں اس امر کی نمایاں مثالیں ہیں کہ لچکدار مضبوطی کے جو مختلف نظریے ہیں (دفعہ ۲۵) اُن میں سے ہر ایک کس نتیجے کی طرف رہبری کرتا ہے تقسیم اور مقدار کا فرق شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ ایک دیے ہوئے اندرونی دباؤ کے لیے دیوار کی موٹائی اور نل کے قطر کی بے خطر نسبت ایک دی ہوئی شے کے لیے اعظم خاص زور، اعظم خاص فساد، یا زور کے اعظم فرق (اور اس طرح اعظم جزی زور) کی قیمت پر منحصر ہوگی۔ یہ سب دیوار کے اندرونی پہلو پر اعظم ہونگے۔ مضبوطی کے جو تین نظریے ہیں اُن کا نلوں پر اطلاق سمجھنے کے لیے مناسب ہے کہ دفعہ ۱۲۲ میں اندرونی پہلو کے لیے جو نتائج دیے گئے ہیں اُن کو ایسی شکل میں بیان کیا جائے جس سے مقابلے میں آسانی ہو۔ فرض کرو کہ ف = اندرونی دباؤ، یا ف کی وہ قیمت جو لچکدار ناکارگی پیدا کرنے کے لیے عین ضروری ہو۔ فرض کرو کہ ٹ = دیوار کی موٹائی $= ما - ما_۲$ اور ق = اندرونی قطر = ۲ $ما_۲$ اور فرض کرو کہ $\frac{ما}{ما_۲}$ یا

صفحہ ۳۳۵

$$\frac{ق + ۲ ٹ}{ق} = ک \quad \text{اور} \quad \frac{ٹ}{ق} = ع = \frac{۱}{۲}(ک - ۱)$$

اعظم خاص زور — فرض کرو کہ ز = اعظم بے خطر خاص زور = $ف_{لا}$ کی قیمت لچکدار ناکارگی پر۔ تب مساوات (۷) دفعہ ۱۲۲ حسب ذیل ہو جائیگی :—

$$\text{ز} = \text{ف}\,\frac{\text{ک}^2 + ۱}{\text{ک}^2 - ۱} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور
$$\frac{\text{ف}}{\text{ز}} = \frac{\text{ک}^2 - ۱}{\text{ک}^2 + ۱} \;\text{یا}\; \frac{۲\text{عہ}(\text{عہ}+۱)}{۱ + ۲\text{عہ} + ۲\text{عہ}^2} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز
$$\text{ک} = \sqrt{\frac{۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ز}}}{۱ - \frac{\text{ف}}{\text{ز}}}} \;\text{یا}\; \sqrt{\frac{\text{ز} + \text{ف}}{\text{ز} - \text{ف}}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور
$$\text{عہ یا}\; \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} = \frac{۱}{۲}\left\{\sqrt{\frac{۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ز}}}{۱ - \frac{\text{ف}}{\text{ز}}}} - ۱\right\} \;\text{یا}$$

$$\frac{۱}{۲}\left\{\sqrt{\frac{\text{ز} + \text{ف}}{\text{ز} - \text{ف}}} - ۱\right\} \quad \ldots\ldots (۴)$$

یہ دی ہوئی شرائط کی مناسبت سے موزوں ابعاد معلوم کرنے کے لیے مساواتوں کی بہترین شکلیں ہیں ۔

اعظم خاص فساد ـــ فرض کرو کہ ز = اعظم "معادل" بے خطر زور یعنی سے × اعظم خاص فساد یا سے × س کی قیمت لچکدار ناکارگی پر ۔ تب اس صورت کے لیے کہ نل کو طولی زور برداشت کرنا نہ پڑے مساوات (۸) دفعہ ۱۲۲ حسب ذیل ہوگی :—

$$\text{ز} = \text{ف}\left\{\frac{\text{ک}^2(\text{م}+۱) + (\text{م}-۱)}{\text{م}(\text{ک}^2-۱)}\right\} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اور
$$\frac{\text{ف}}{\text{ز}} = \frac{\text{م}(\text{ک}^2 - ۱)}{\text{ک}^2(\text{م}+۱) + (\text{م}-۱)} \;\text{یا}\; \frac{۲\text{م عہ}(۱+\text{عہ})}{\text{م} + ۲\text{عہ}(۱+\text{عہ})(\text{م}+۱)} \quad \ldots\ldots (۶)$$

$$\text{نیز}\quad \text{ک} = \sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)}{1-\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}\ \text{یا}\ \sqrt{\frac{\text{زَ}+\text{ف}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)}{\text{زَ}-\text{ف}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}\ \cdots\cdots(7)$$

اور عہ یا $\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)}{1-\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}-1\right\}\ \text{یا}\ \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\text{زَ}+\text{ف}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)}{\text{زَ}-\text{ف}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}-1\right\}\cdots\cdots(8)$$

اگر نل سرے کے دباؤ $\frac{\pi}{4}$ ق^2 ف سے پیدا ہونے والے پورے طولی تناؤ کو برداشت کرے تو مساوات (۱۰) دفعہ ۱۲۲ حسبِ ذیل ہوگی:-

$$\text{زَ}=\text{ف}\left\{\frac{\text{ک}^2(\text{م}+1)+\text{م}-2}{\text{م}(\text{ک}^2-1)}\right\}\cdots\cdots(9)$$

صفحہ ۳۳۶

$$\text{اور}\ \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}=\frac{\text{م}(\text{ک}^2-1)}{\text{ک}^2(\text{م}+1)+\text{م}-2}\ \text{یا}\ \frac{4\,\text{م}\,\text{عہ}(1+\text{عہ})}{2\text{م}-1+4\,\text{عہ}(1+\text{عہ})(\text{م}+1)}\cdots\cdots(10)$$

$$\text{نیز}\ \text{ک}=\sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{1-\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}\ \text{یا}\ \sqrt{\frac{\text{زَ}+\text{ف}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{\text{زَ}-\text{ف}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}\cdots\cdots(11)$$

اور عہ یا $\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{1-\frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}-1\right\}\ \text{یا}\ \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\text{زَ}+\text{ف}\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{\text{زَ}-\text{ف}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}}-1\right\}\cdots\cdots(12)$$

زور کا اعظم فرق —— فرض کرو کہ زً = زور کا اعظم بے خطر

جبری فرق یعنی $\text{ف}_{\text{ما}} + \text{ف}_{\text{م}}$ کی وہ قیمت جو لچکدار ناکارگی کے لیے ضروری ہو۔ تب مساوات (۷ ب) دفعہ ۱۴۴ حسب ذیل ہوگی:—

$$\text{ز}'' = \text{ف}\,\frac{\text{۲ک}^{۲}}{\text{ک}^{۲} - \text{۱}} \qquad \text{(۱۳)}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{ف}}{\text{ز}''} = \frac{\text{ک}^{۲} - \text{۱}}{\text{۲ک}^{۲}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{۲ ع (۱ + ع)}}{\text{۱ + ۴ع + ۴ع}^{۲}} \qquad \text{(۱۴)}$$

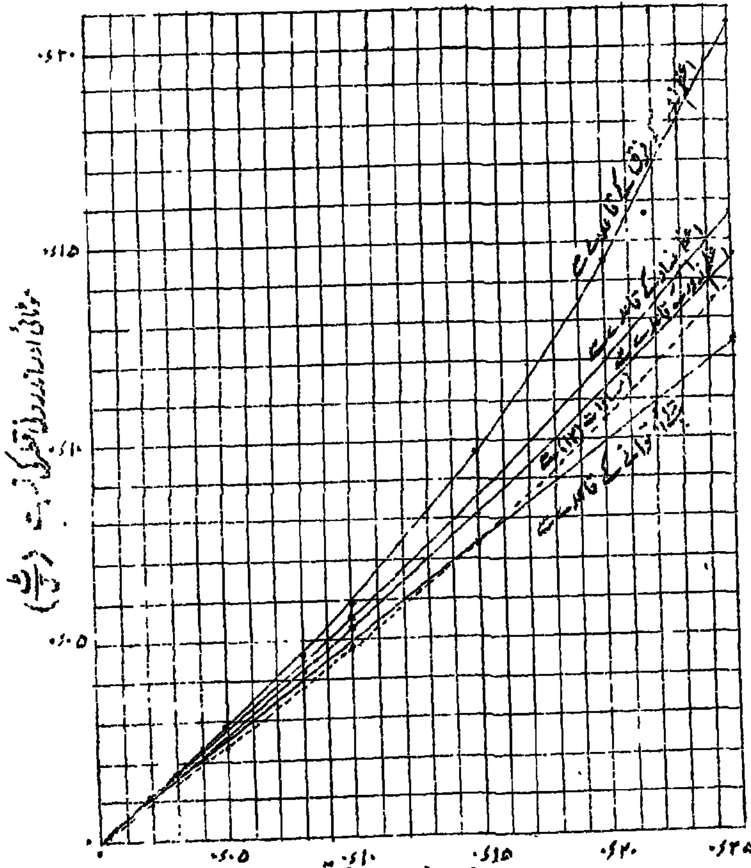
$$\text{نیز}\quad \text{ک} = \sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۲}\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{\frac{\text{ز}''}{\text{ز}'' - \text{۲ف}}} \qquad \text{(۱۵)}$$

$$\text{اور ع یا}\ \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left\{\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۲}\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}}} - \text{۱}\right\} \qquad \text{(۱۶)}$$

$\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$ کی قیمتیں $\frac{\text{ف}}{\text{ز}}$، $\frac{\text{ف}}{\text{ز}}$ یا $\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}$ کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے مساواتوں (۴)، (۸)، (۱۲) اور (۱۶) کے مطابق شکل ۱۶۱ ا میں دکھائی گئی ہیں اور زیادہ موٹے اُستوانوں کے لیے بھی شکل ۱۶۱ ب میں دکھائی گئی ہیں۔ م کی قیمت ۴ لی گئی ہے۔ اگر اندرونی دباؤ ف دیا ہوا ہو اور اعظم زور یا اعظم کامی معادل زور ز یا ز″ دیا گیا ہو (جو ممکن ہے کہ کسی مناسب نسبت میں گھٹا ہوا ہو) تو ان نقشوں سے نل کی مطلوبہ موٹائی اندرونی قطر کی رقوم میں آسانی سے پڑھ لی جا سکتی ہے۔ یا متبادلاً اگر نل دیا ہوا ہو تو زور یا "معادل زور" کی ایک مختص اعظم قیمت کے لیے بے خطر اندرونی سیالی دباؤ کی قیمت یا مختص سیالی دباؤ کے لیے زور وغیرہ پڑھ لیے جا سکتے ہیں۔ نقطہ دار خطوط ہر صورت میں مساوات (۱۲) کو تعبیر کرتے ہیں جہاں کہ محیطی فساد طولی زور کی وجہ سے گھٹ گیا ہے۔ یہ اثر پتلی دیوار کے نلوں میں بہت نمایاں ہوتا ہے اور قطر کے تناسب سے موٹائی کے بڑھنے سے یہ اثر کم ہوتا ہے۔

صفحہ ۳۳۷

ایک پتلے استوانی نل یا خول کے لیے (۴)، (۸)، (۱۲) اور (۱۶) کے متناظر حسب ذیل قاعدے حاصل ہوں گے:—



شکل ۱۶۱ ۱۔ اندرونی دباؤ کے تحت اُسطوانوں کی لچکدار مضبوطی

اعظم زور کے لیے $\frac{ٹ}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز}$ .... (۴ و)

اعظم فساد (اور صفر طولی زور) کے لیے $\frac{ٹ}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز_ٹ} \div \left(1 - \frac{1}{م}\frac{ف}{ز}\right)$ .... (۱۰ و)

اعظم فساد (مع طولی زور) کے لیے $\frac{ٹ}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز_ٹ}\left(1 - \frac{1}{2م}\right) \div \left(1 - \frac{1}{م}\frac{ف}{ز}\right)$ ... (۱۲ و)

زور کے اعظم فرق کے لیے $\frac{ٹ}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز_ٹ} \div \left(1 - \frac{ف}{ز_ٹ}\right)$ یا $\frac{1}{2}\frac{ف}{ز_ٹ - ف}$ .... (۱۶ و)

صفحہ ۳۳۸

شکل ۱۶۱ ب - اندرونی دباؤ کے تحت موٹے اُستوانوں کی لچکدار مضبوطی

صفحہ ۲۳۹

دیکھو یہ ہر صورت میں موٹے اُستوانے کے متناظر قاعدے سے حاصل ہونے والی مقداروں سے کم ہیں جس سے معلوم ہوا کہ "موٹے" اُستوانے کو پتلا سمجھنا سلامتی کے منافی ہے (دیکھو شکل ۱۶۱ ا)۔ دیوار کی موٹائی اندرونی قطر کی صرف ۱/۴ ہو تو یہ خطا اعظم زور کے قاعدے سے ۱۰ فی صدی سے زیادہ ہوتی ہے اور سادہ قاعدہ (۴ ا) ف/ز کا (۱۶) کے مقابلے میں ۳۰ فی صدی بیش اندازہ کرتا ہے - بارلو کا جو قاعدہ موٹے (اور پتلے) اُستوانوں کے لیے ہے جو بہت کثرت سے استعمال ہوا ہے لیکن جو کسی معقول استدلال پر مبنی نہیں وہ اُسی ربط (۴ ا) کی شکل کا ہے لیکن بیرونی قطر کی رقوم میں ہے اور اس کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :-

$$\frac{ٹ}{ق + ۲ٹ} = \frac{۱}{۲}\frac{ف}{ز}$$

یہ تحویل ہو کر مساوات (۱۶ ا) کی شکل اختیار کرتا ہے اور اس کو ایک آزمائشی قاعدہ سمجھنا چاہیے - بحیثیت ایک آزمائشی قاعدے کے یہ اعظم فساد کی مساوات (۸) پر مبنی منحنی کی خاصی پیروی کرتا ہے اور اس سے زیادہ تر سلامتی کی جانب ہٹتا ہے -

تجرباتی نتائج ــــ تجارتی آغوشی تپا جوڑے فولادی نلوں پر کیے ہوئے کثیر تعداد کے امتحانوں سے پروفیسر استوارٹ نے نتیجہ اخذ کیا ہے کہ ضابطوں (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) کے طریقے سے نقطۂ مغلوبیت کے لیے جو زور حاصل ہوتا ہے وہ زیرِ بحث شے کے تنشی نقطۂ مغلوبیت کے امتحانوں سے بہت مطابق ہوتا ہے - دباؤ کے تحت مغلوبیت کی جو پہلی علامات ہوتی ہیں اُن کو مشاہدہ کرنے کے تجرباتی طریقے اُس کے پرچے میں شائع نہیں ہوئے - نیز اُس نے جو نل استعمال کیے وہ بغیر جوڑ کے نہیں تھے اور سب کی موٹائی قطروں کے ۰.۰۲ سے کم تھی اور اس حد تک محسوبہ زور باہم زیادہ مختلف نہیں ہوتے (دیکھو شکل ۱۶۱ ا)- ان وجوہ سے ایسے تجربات کو بغیر جوڑ کے موٹے اُستوانوں کی مضبوطی کے مختلف ضابطوں کے تقابل میں قطعی شہادت نہیں سمجھا جا سکتا اگرچہ ان سے

Barlow ۵

تجارتی تیاجوڑے نلوں کی کامی مضبوطی کے متعلق کارآمد معلومات حاصل ہوتی ہیں۔ اندرونی دباؤ والے موٹے اُستوانوں پر کوک[۱] اور رابرٹسن[۲] نے جو چند بہت اچھے تجربات کیے ہیں اُن سے موٹائی اور قطر کے بہت ہی مختلف تناسبوں کے نرم فولادی کے اُستوانوں کے لیے نقطۂ مغلوبیت کے زور کے اچھے نتائج حاصل ہوئے جو باہم بہت متطابق ہیں اور اعظم خاص فساد اور زور کے اعظم فرق کے نظریوں سے حاصل ہونے والی قیمتوں (شکل ۱۶۱ ب) کے بین بین ہیں۔ ڈھلے لوہے کے لیے (جو ایک پھوٹک شے ہے) کوک اور رابرٹسن نے شکستگی کے متناظر اندرونی دباؤ کے لیے اچھے نتائج حاصل کیے جو ضابطہ (۴) سے اعظم خاص زور کو شے کی انتہائی تنشی مضبوطی کے مساوی رکھنے سے حاصل ہونے والے نتائج کے بہت مطابق ہیں۔ یہ نتائج پھوٹک اشیا کے لیے "اعظم زور کے قاعدے" کی صحت پر دلالت کرتے ہیں اور سکونی بوجھوں کے تحت متمدد اشیا کے لیے "زور کے اعظم فرق" کے نظریے کی تقریبی صحت ثابت کرتے ہیں۔ لیکن اگر "اعظم فسادی توانائی" کے مفروضے (دفعہ ۲۵) کے لیے منحنی کھینچا جائے جو شکل ۱۶۱ ب میں نہیں دکھایا گیا تو ایسی اشیا کے لیے جو بہت متمدد ہوں ان حاصل شدہ نتائج سے یہی نظریہ دوسرے تین نظریوں سے زیادہ مطابق ہوتا ہے۔ مخلوط زور کے متعلق دوسرے جو تجربات بہت مختلف طریقوں پر کیے گئے ہیں (دیکھو دفعہ ۲۵) اُن کے ساتھ بھی یہ نتائج بہت مطابقت رکھتے ہیں۔ ضمناً یہ ذکر کر دینا مناسب معلوم ہوتا ہے کہ کوک اور رابرٹسن نے معلوم کیا کہ اُنھوں نے نرم فولاد کے موٹے اُستوانوں کی جو انتہائی مضبوطی ایسے دباؤ کے تحت معلوم کی جس سے اُستوانے پھٹ گئے وہ مضبوطی لامی کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) اور (۴) کے متناظر امتحانی قانون کے مطابق ہوتی ہے اگر ان ضابطوں میں ز کو شے کی انتہائی تنشی مضبوطی لیا جائے۔

صفحہ ۳۴۲

---

[۱] Cook

[۲] Robertson

۱۲۲اب ۔ **نل بیرونی دباؤ کے تحت** ـــــ اگر ایک استوانی خول یا نل پر بیرونی دباؤ ہو تو دیوار میں ایک محیطی یا حلقہ فشار پیدا ہوگا جس کی حدت مساوات ۱۲ دفعہ ۱۲۲ سے حاصل ہوگی ۔ اگر نل کی دیوار پتلی ہو تو فشاری زور تقریباً یکساں ہوگا اور اس کو آسان ضابطہ (۲) دفعہ ۱۱۹ سے محسوب کیا جا سکتا ہے ۔صرف یہ کرنا ہوگا کہ شکل ۱۵۶ء کی تمام قوتوں کی سمت کو معکوس کر دیا جائے ۔لیکن بیرونی دباؤ کا مسئلہ اندرونی دباؤ کے مسئلے سے تقریباً اُسی لحاظ سے مختلف ہے جس لحاظ سے داب روک ، بندھن سلاخ سے مختلف ہوتا ہے ۔ کیونکہ جس طرح داب روک اگر لمبا اور بے سہارا ہو تو خم ہو کر یا جھک کر ٹوٹ سکتا ہے اسی طرح بڑے قطر کے نل کی پتلی دیوار ٹوٹ سکتی ہے ۔ دیوار موٹی ہو تو اُستوانے کی تراش اُس وقت تک مدور رہتی ہے کہ شے کی فشاری مزاحمت کی حد نہ پہنچ جائے ۔ اگر نل کا طول چھوٹا ہو (مثلاً قطر کے چھ گنے سے کم ہو) تو اس کو سروں سے کچھ سہارا مل سکتا ہے ۔ اس لیے مسئلے کو آسان بنانے کے لیے پہلے نل کا طول بہت لمبا فرض کیا جا سکتا ہے ۔ دفعہ ۱۱۹ کی ترقیم استعمال کرو لیکن زٖ سے دیواروں کے فشاری زور کی حدت تعبیر کرو اور ر سے بیرونی نصف قطر اور ف سے بیرونی دباؤ ۔ تب حسبِ سابق

$$زٖ = \frac{ف\,ر}{ٹ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب نل کے ایک بہت چھوٹے محوری طول مثلاً اکائی طول پر غور کرو ۔ دیوار جس کا محیطی طول ۲ ۲ ۲ ر اور تراش مستطیلی ٹ × ۱ ہے ایک مجموعی فشار شٖ کے تحت ہے جہاں

$$شٖ = زٖ \times ٹ \times ۱ = ف\,ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

شٖ کی جو فاصل قیمت غیر قائمیت پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے وہ

آئیلر[1] کے قواعد باب ۹ سے جو داب روکوں اور ستونوں سے متعلق ہیں مماثلت کے ذریعے اخذ کیے جا سکتے ہیں اگر معادل داب روک کا طول اور سروں کی کیفیت معلوم ہو جائے۔ اس قسم کی تصوری صورت میں صریحاً کسی طرح کی متشاکل ناکارگی تسلیم کرنی ہوگی اور سادہ ترین متشاکل شکل وہ ہوگی جس میں مدور تراش ایک خفیف سی بیضوی شکل اختیار کر کے بگڑنا شروع کرتی ہے اور اس شکل کی تجربے سے بھی تصدیق ہوتی ہے - ایسی صورت میں شکل ۱۶۱ ج کے مطابق تعاکس خمیدگی کے چار نقطے ھ، ک، ل، م ہونگے یعنی ایسے نقاط جو (ک ل اور ھ م کے) بڑھتے ہوئے انحنا کو (ھ ک اور ل م کے) گھٹتے ہوئے انحنا سے جدا کرتے ہیں اور یہ چار نقطے نل کی تراش کو چار مساوی قوسوں میں تقسیم کرینگے جن میں سے ہر ایک کا طول $\frac{1}{2}$ ㅠ ر ہوگا - تب کسی ایک قوس مثلاً ھ ک کو ایک داب روک تصور کریں جو سروں ھ اور ک پر قبضہ دار ہے تو مساوات (۶) دفعہ ۱۰۰ سے فاصل دباؤ پر

شکل ۱۶۱ ج

$$ش = \frac{ㅠ^2 آ ے}{(\frac{1}{2} ㅠ ر)^2} = \frac{4 آ ے}{ر^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اب $آ = \frac{1}{12} \times 1 \times ٹ^3$ اور ش = ف ر اس لیے (۳) سے

$$ف ر = \frac{4 ے ٹ^3}{12 ر^2}$$

یا

$$ف = \frac{ے}{3} \left(\frac{ٹ}{ر}\right)^3 \text{ یا } \frac{8 ے}{3} \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3 \ldots\ldots\ldots (۴)$$

صفحہ ۳۴۱

[1] Euler

یہ ایسے نلوں کا تقریبی فاصل دباؤ ہے جو اتنے لمبے ہیں کہ سرے درمیانی حصے کی ناکارگی کی مزاحمت میں کوئی مدد نہیں دیتے ۔ اس قیمت کو جو صحیح تحلیل سے نہیں حاصل ہوتی بلکہ ایک محوری بوجھ کے سیدھے داب روک کی مماثلت سے حاصل ہوئی ہے بالکل صحیح نہیں سمجھنا چاہیے بلکہ یہ سمجھنا چاہیے کہ اس سے ف کی فاصل قیمت کے جملے کی شکل حاصل ہوتی ہے ۔ چونکہ نل در اصل چھوٹے محوری طول کا نہیں اس لیے جس اکائی طول پر غور کیا گیا ہے اُس کے متصل حصوں سے اُس کے ضد انحنائی انحنا کی مزاحمت عمل میں آتی ہے اور لچک کا مناسب مقیاس جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں دکھایا گیا ہے ے نہیں ہوگا بلکہ $\frac{م^2}{م^2-1}$ ے ہوگا جہاں $\frac{1}{م}$ پوائی سن کی نسبت ہے ۔ زیادہ صحیح ریاضیاتی تحلیل سے حسب ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے :-

$$ف = \frac{م^2}{م^2-1} \times \frac{ے}{4} \times \left(\frac{ٹ}{ر}\right)^3 \quad یا \quad \frac{م^2}{م^2-1} \times 2 ے \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3 \quad ......(5)$$

اس نتیجے کی ایک سادہ تمثیل کے لیے مصنف، مسٹر ساؤتھ ویل کا ممنون ہے ۔ اگر مدور تراش کا ایک خفیف سا بگاڑ ناقصی تراش میں فرض کیا جائے تو فاصل دباؤ ف اس طرح کا ہوگا جو اس خفیف سی بگڑی ہوئی شکل کو دیوار کی لچکدار قوتِ بازگشت کے مقابلے میں تعادل میں رکھیگی ۔ فرض کرو کہ نصف قطر ر کی مدور تراش ایک ناقص بن جاتی ہے جس کے نیم محور ر+صہ اور ر-صہ ہیں (شکل ۱۶۱ ج) جہاں صہ چھوٹا ہے اور اس کی وجہ سے محیطی فشار ف (ر+صہ) اور ف (ر-صہ) ہونگے جیسا کہ شکل میں دائیں طرف دکھایا گیا ہے ۔ تب ناقص کی مساوات یہ ہوگی :-

$$\frac{لا^2}{(ر+صہ)^2} + \frac{ما^2}{(ر-صہ)^2} = 1$$

یا

$$ما = \frac{ر-صہ}{ر+صہ}\sqrt{(ر+صہ)^2 - لا^2}$$

اس کو دو مرتبہ تفرق کرکے انحنا کے ضابطے میں مندرج کریں جو دفعہ ۷۷ کے حاشیے میں دیا گیا ہے تو کسی نقطہ ط کا انحنا صہ کی پہلی قوت تک

$$\frac{1}{\text{ہما}} = \frac{1}{\text{ر}}\left\{1 - 3\frac{\text{صہ}}{\text{ر}} + 6\frac{\text{صہ}}{\text{ر}} \times \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2}\right\}.$$

انحنا کا اضافہ

صفحہ ۴۲۲

$$\frac{1}{\text{ہما}} - \frac{1}{\text{ر}} = \frac{3}{\text{ر}}\left\{-\frac{\text{صہ}}{\text{ر}} + 2\frac{\text{صہ}}{\text{ر}} \times \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2}\right\} \quad \text{(۵ ا)}$$

اور یہ ایک خمیدہ ٹکڑے میں خماؤ کے معیار کے تناسب ہوگا (دیکھو دفعہ ۱۲۹)۔ تراش کے کسی نقطے پر خمیدگی کی مزاحمت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ضد انحنائی انحنا کی مزاحمت (دفعہ ۹۴) کی رعایت سے صرف اتنا کرنا ہوگا کہ انحنا کے اضافے کو

$$\frac{\text{م}^2}{\text{م}^2-1}\,\bar{\text{آ}} \text{ سے یعنی } \frac{\text{م}^2}{\text{م}^2-1}\cdot\text{ے}\,\frac{\text{ٹ}^3}{12}$$

سے ضرب دینا ہوگا۔

اس طرح (۵ ا) سے ط پر مزاحمت کا معیار

$$\text{م}_{\text{ط}} = \frac{\text{م}^2\text{ے}}{\text{م}^2-1} \times \frac{\text{ٹ}^3\text{صہ}}{4\text{ر}^2}\left\{-1 + 2\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2}\right\} \quad \text{(۵ ب)}$$

اور لا = ۰ پر

$$\text{م}_{\text{ج}} = -\frac{\text{م}^2\text{ے}}{\text{م}^2-1} \times \frac{\text{ٹ}^3\text{صہ}}{4\text{ر}^2} \quad \text{(۵ ج)}$$

اور لا = ر پر

$$\text{م}_{\text{ا}} = +\frac{\text{م}^2\text{ے}}{\text{م}^2-1} \times \frac{\text{ٹ}^3\text{صہ}}{4\text{ر}^2} \quad \text{(۵ د)}$$

اس خفیف ناقصی بگاڑ کی حالت میں تعادل تعدیلی واقع ہونے

کے لیے ان معیاروں کو متناظر کھاؤ کے معیاروں کا توازن کرنا ہوگا جو دباؤ ف سے پیدا ہوتے ہیں۔ شکل ۱۶۱ ج میں دکھائے ہوئے رُبع دائرہ کے لیے ا کے گرد معیار لیں اور انحنا میں اضافہ کرنے والے معیار کو مثبت سمجھیں تو

$$\text{م}_{۱} = \text{ص}_{\text{ج}} - \text{ف}\,(\text{ر} - \text{صد})^{۲} + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ف}\,(\text{ر} + \text{صد})^{۲} + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ف}\,(\text{ر} - \text{صد})^{۲}$$

$$= \text{ص}_{\text{ج}} + ۲\,\text{ف}\,\text{ر}\,\text{صد}$$

(۵ و) اور (۵ ج) سے $\text{م}_{۱}$ اور $\text{ص}_{\text{ج}}$ کی قیمتیں لے کر درج کرنے سے

$$۲\,\text{ف}\,\text{ر}\,\text{صد} = \text{م}_{۱} - \text{ص}_{\text{ج}} = \frac{۲\,\text{م}^{۲}}{\text{م}^{۲} - ۱} \times \text{ے}\,\frac{\text{ٹ}^{۳}\,\text{صد}}{۴\,\text{ر}^{۲}}$$

$$\text{ف} = \frac{\text{م}^{۲}}{۴\,(\text{م}^{۲} - ۱)}\,\text{ے}\left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ر}}\right)^{۳} \text{ یا } \frac{\text{م}^{۲}}{\text{م}^{۲} - ۱}\,۲\,\text{ے}\left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)^{۳}$$

یہ وہی قیمت ہے جو (۵) میں دی گئی ہے۔ نیز اگر نل کی دیوار پر کوئی نقطہ ط لیا جائے اور حصے ج ط کے معیار ط کے گرد لیے جائیں اور ج پر کے معیار کے لیے قیمت (۵ ج) اور ما کے لیے اوپر کی قیمت جو لا کی رقوم میں دی گئی ہے استعمال کریں تو صد کی پہلی قوت تک یہ پایا جائیگا کہ ف کی اس قیمت سے ط پر کھاؤ کا معیار اُس مزاحم معیار کے مساوی ہوگا جو خفیف ناقصی بگاڑ کے لیے (۵ ب) سے حاصل ہوگا۔

یہ فاصل دباؤ صریحاً تصوری صورت کے لیے ہے اور تصوری صورت سے جو انحراف واقع ہونگے مثلاً تراش کا غیر کامل طور پر مدور ہونا، دیوار کی موٹائی کا نامساوی ہونا، نل جس شے کا بنا ہوا ہے اس کی غیر یکسانیت اور اس کی لچک کی حدود کا محدود ہونا ان سب باتوں کا اثر یہ ہوگا کہ ناکارگی پست تر دباؤں پر واقع ہوگی۔ بغیر جوڑ کے اور آغوشی تپا جوڑے دونوں طرح کے نلوں پر جو تجربات کیے گئے اُن سے ناکارگی دباؤں کے لیے قیمت

صفحہ ۳۴۳

$$ف = ج \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

کی شکل میں حاصل ہوتی ہے جو (۴) اور (۵) کے مطابق ہے لیکن مستقل ج کی قیمت عموماً (۵) سے حاصل ہونے والی قیمت سے ۲۵ تا ۳۰ فی صدی کم حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً اگر $\frac{ٹ}{ق} < ۰.۰۲۵$ تو تجرباتی قیمتیں تقریباً حسبِ ذیل ہیں:-

فولادی نلیوں کے لیے $ف = ۵۰ \times ۱۰^6 \times \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3$ پونڈ فی مربع انچ ....(۷)

پیتل کی نلیوں کے لیے $ف = ۲۵ \times ۱۰^6 \times \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3$ پونڈ فی مربع انچ .....(۸)

بہت موٹی نلیوں کی صورت میں، بہت چھوٹے داب روکوں کی طرح، ناکارگی خمیدگی سے واقع نہیں ہوگی بلکہ مادے کے کچلے جانے کی وجہ سے ہوگی اور سوراخ بتدریج بند ہوتا جائیگا۔

اگر نلی نہ بہت پتلی ہو نہ بہت موٹی مثلاً $\frac{ٹ}{ق} > ۰.۰۲۵$ تو ناکارگی کے حالات (۵) یا (۶) کے مطابق ناکارگی اور لچک کی حد پہنچ جانے کی ناکارگی کے بین بین ہونگے۔ ایسی صورتوں میں، داب روکوں کی طرح، ایک کم وبیش آزمائشی ضابطے کے ذریعے ناکارگی کی انتہائی مزاحمت کو پتلے پن $\frac{ق}{ٹ}$ کی ایک بڑی وسعت کے لیے ایک کم وبیش آزمائشی ضابطے کے ذریعے بیان کیا جاسکتا ہے۔ یہ ضابطہ بھی داب روک کے ضابطوں کے نمونے پر ہوسکتا ہے۔ چنانچہ $\frac{ٹ}{ق} > ۰.۰۳$ کے لیے $\frac{ٹ}{ق}$ کی ایک بڑی وسعت کے لیے کارمن[1] اور کار[2] نے معلوم کیا کہ حسبِ ذیل ربط درست رہتے ہیں،

---

[1] Carman [2] Carr